Memorias

Memorias

X Escuela de Invierno en Matemática Educativa

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa

Red Cimates

INDICE

MEMORIA X EIME

RELACIÓN DE ÁRBITROS

- Eddie Aparicio Lara
- Hipólito Hernández Pérez
- Marcela Ferrari Escolá
- Julio Antonio Moreno Gordillo
- Jaime Lorenzo Arrieta Vera
- Gisela Montiel Espinosa
- Gustavo Martínez Sierra
- Liliana Suárez Tellez
- Apolo Castañeda Alonso
- Leopoldo Zúñiga Silva
- Juan Antonio Alanis Rodríguez
- Guadalupe Cabañas Sánchez
- Rosa María Farfán Márquez
- Ricardo Cantoral Uriza
- Socorro Valero Cazarez
- Ruth Rodríguez Gallegos
- Flor Monserrat Rodríguez Vásquez
- Jesús E. Pinto Sosa
- Saúl Ramos Cancino
- Gabriela Buendía Abalos

PRESENTACIÓN

En esta Décima Escuela de Invierno en Matemática Educativa presentamos por primera vez la Memoria del evento la cual contiene artículos de los participantes que seguramente servirán de referencia para futuras discusiones y una continuación de las investigaciones.

Los investigadores que en esta ocasión aceptaron nuestra invitación a publicar en la Memoria participaron en la Escuela de Invierno en diversas actividades: laboratorios, reportes y carteles principalmente.

La variedad de temáticas tratadas reflejan sin duda el quehacer de nuestra comunidad. Sobresalen estudios socioepistemológicos, escuela de pensamiento que nace al seno de la Red de Cimates y avanza continua y sólidamente.

Agradezco el quehacer de los colegas que gustosa y profesionalmente arbitraron cada uno de los artículos aquí presentados e invito, finalmente a continuar con esta Memoria pues un evento que ha alcanzado tal relevancia nacional como nuestra Escuela de Invierno la requiere.

Gabriela Buendía
Presidente Red de Cimates

PRESENTACIÓN ASPECTOS VISUALES EN PROBLEMAS DE CÁLCULO Y ANÁLISIS

María de Jesús Acuña, Nancy Janeth Calvillo y Ricardo A. Cantoral
Cinvestav del IPN, México D.F.
macuna@cinvestav.mx, nancycalvillo@gmail.com, rcantor@cinvestav.mx
Laboratorio Didáctico

Resumen

Este escrito muestra la descripción de algunas actividades referidas a las materias de Cálculo y Análisis Real. Dichas actividades fueron diseñadas en el marco de dos trabajos de tesis con objetivos de investigación diferentes, sin embargo relacionados en el aspecto de la visualización, es así que nuestro enfoque es principalmente el análisis de los aspectos visuales de conceptos tales como la derivada, la integral y la convergencia de sucesiones numéricas infinitas.

Palabras Clave: Visualización, Variación e Intuición.

Introducción

Uno de los objetivos centrales de la Matemática Educativa consiste en elaborar descripciones sobre el funcionamiento del *sistema didáctico* y de los *fenómenos didácticos* que en él suceden (Dolores, 2000). Además las investigaciones en Matemática Educativa que han sido llevadas a cabo en la materia de Cálculo señalan que el estatus y naturaleza de sus conceptos tiene un énfasis significativo en los aspectos formales dejando de lado otras dimensiones (Cordero, 2005). De esta manera, nuestras actividades surgen como alternativas de aprendizaje de conceptos de Cálculo y Análisis.

Las actividades que presentaremos son la conjunción de dos trabajos de tesis con diferentes objetivos de investigación, que sin embargo coinciden en el aspecto de la visualización, entendiendo a esta como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información, asimismo visualizar no se reducirá al acto de ver las diversas representaciones de un objeto matemático (Cantoral y Montiel, 2001).Considerando lo anterior, haremos la presentación de las actividades en dos partes:

- La primera parte comprende los aspectos visuales en el área del Cálculo.

En ese sentido revisamos investigaciones (Cáceres, 1997; Cantoral y Farfán, 1997; Galindo, 1998) en donde se han reportado varias de las dificultades que presentan los estudiantes en torno a los conceptos del cálculo diferencial e integral como lo son: razón de cambio promedio, razón de cambio instantáneo, dificultades en entender a la tangente como el límite de las rectas secantes, etc. Las causas atribuidas a esta problemática están relacionadas fundamentalmente, con una inadecuada planificación y ejecución del proceso de enseñanza, además de que la mayoría de las veces los programas no son vistos en el tiempo destinado para ello, y que el profesor usa métodos muy expositivos y poco participativos (Dolores, 2000).

Por otro lado Barrera (2002) y Dolores (2000) encontraron que en los cursos tradicionales de cálculo diferencial e integral, se prioriza el manejo operativo de límites, reglas de derivación y reglas de integración, sin considerar una gran variedad de situaciones que están vinculadas al concepto, como lo son: la noción de límite, función, variación y noción de aproximación, minimizando así su significado geométrico y prácticamente reduciendo a cero su relación con la variación física, además de que el tratamiento algebraico del proceso inverso derivación e integración es mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, sin embargo visualmente no es inmediato.

Es así que en esta investigación nos interesamos en mostrar una forma de visualizar dicho proceso. Con este objetivo en mente diseñamos una secuencia, con la cual pretendemos a través de diversas actividades guiar al estudiante a encontrar la relación visual del proceso derivación e integración. Para esto nos guiamos por la metodología de la ingeniaría didáctica[1] que tiene su sustento teórico en la teoría de situaciones didácticas[2]. Este trabajo está inmerso en la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional[3].

- En la segunda parte, proponemos una presentación alternativa de la Convergencia de Sucesiones Numéricas Infinitas.

En este sentido encontramos diversos trabajos de investigación (Alcock y Simpson, 2004 y 2005; Cantoral y Reséndiz, 1997; Crespo, 2005; Polya, 1966; Robert, 1982) que reconocen la importancia de la intuición y la visualización al estudiar temas matemáticos como los que nos atañen. Es así que la intuición será entendida como la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea (Crespo, 2005), sin embargo, como afirma Fischbein (1987) un modelo intuitivo no será necesariamente una reflexión directa de cierta realidad (muchas veces estará basado en una interpretación abstracta de esa realidad)).

Por otro lado, el paradigma de la enseñanza que se sigue en el sistema educativo está centrado fundamentalmente en enfoques axiomático deductivos y en la mera resolución de problemas (Cantoral y Montiel, 2003). Este paradigma, que hemos identificado al abordar la enseñanza actual del tema de "Convergencia de sucesiones numéricas" se basa en un enfoque tradicional en el que se estudia primero la teoría de sucesiones numéricas infinitas y posteriormente la teoría de series numéricas infinitas y de funciones.

Con respecto a la teoría de convergencia de series, en (Farfán, 1997) se señala que en la historia de las ideas se pueden identificar dos grandes momentos claramente diferenciados para su tratamiento: el primero se refiere al surgimiento del cálculo de límites de algunas series particulares y el segundo al surgimiento de una teoría general para la convergencia de series.

---

[1] Una descripción de la ingeniería didáctica aparece detallada en Artigue (1995).

[2] La teoría de situaciones didácticas, introducida por G. Brousseau (1986), proviene de una teoría para el control de situaciones de enseñanza en su relación con la producción matemática del conocimiento. Los sistemas didácticos considerados distinguen tres componentes mutuamente interrelacionadas: el maestro, el estudiante y el conocimiento.

3 El PyLV es una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el sistema social, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales, esta línea de investigación posee una triple orientación: lo cognitivo, lo didáctico y lo socio-epistemológico (Cantoral y Farfán, 1998).

Además, se identifica al trabajo de J. Fourier (1882) sobre la conducción del calor como el medio en el que se reconoció necesario el estudio de la convergencia como concepto autónomo. Visto así, el problema físico y el concepto matemático son indistinguibles en ese contexto (Farfán, 1997). Fue entonces que A. L. Cauchy se dio a la tarea de trabajar en la elaboración de criterios de convergencia de series, mismos que tuvieron origen en la comparación con series cuya suma es conocida. Es así que según Farfán (Ob. cit.) cuando los momentos 1 y 2 antes descritos, se unen, es decir, se une lo particular con lo general, es que surge la teoría de sucesiones, a manera de formalización. Sin embargo, hoy en día ambos fenómenos son equivalentes en el tratamiento que los textos escolares hacen del tema; no obstante, en el terreno conceptual esto no es así.

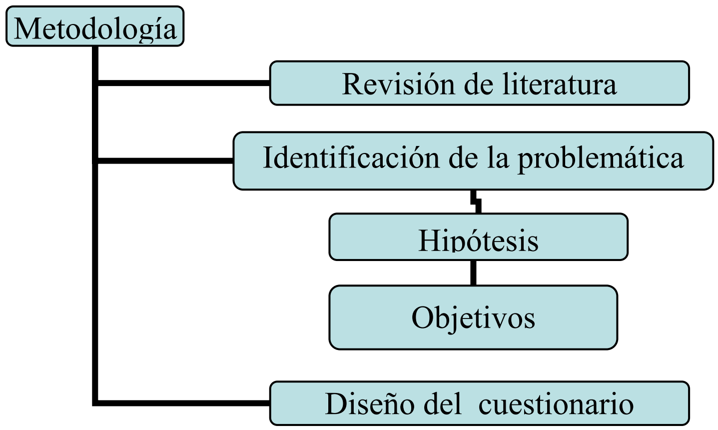
De esta manera identificamos en “La convergencia de Sucesiones Numéricas Infinitas” un escenario natural para poder explorar cómo la intuición y visualización de su teoría, influye en un alumno, pretendiendo establecer un proceso de comunicación de las ideas en situación escolar con el fin de de que los alumnos puedan construir la noción de Convergencia de Sucesiones, es decir, nuestra investigación propone estudiar la teoría de sucesiones atendiendo su construcción social, dando un tratamiento intuitivo del tema, por medio de la visualización antes que de lo riguroso y formal. Ello en virtud de que en su origen, las demostraciones de algunos de los teoremas relativos a sucesiones se dejaban a la interpretación de los lectores, en el entendido que podrían ser visualizadas o intuidas por ellos:

> “Como en todos los casos en los cuales se trata de la convergencia de una sucesión,
> Cauchy gusta de obviar todos los detalles al considerarlos evidentes”
> (Cauchy, 1821/1994, p. 165)

Con base en las ideas anteriores diseñamos algunas actividades, en las cuales se trata de no enfocarse solamente en el aspecto axiomático – deductivo y los aspectos formales con los que suele presentarse este contenido, sino que se incluyen aspectos tales como los intuitivos y los visuales para el estudio del mismo. De esta manera, nuestro objetivo es consolidar en los estudiantes la noción de convergencia de sucesiones numéricas infinitas mediante un trato intuitivo de las sucesiones por medio de la visualización de una particular representación gráfica en un solo eje. Esta investigación es llevada a cabo siguiendo la Aproximación Socioepistemológica de la Investigación en Matemática Educativa.

Metodología

Enseguida describimos a grandes rasgos la metodología que empleamos para el diseño de las secuencias.



Diseño correspondiente a la Primera Parte

En un curso tradicional de Cálculo diferencial e Integral, se afirma que la derivación y la integración son procesos inversos, lo cuál se puede y de hecho se hace, probarlo algebraicamente mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, Sin embargo, nos cuestionamos, en el contexto gráfico ¿en qué consiste lo inverso, si la derivada puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente en un punto, y la integral puede representarse como el área bajo la curva en una cierta región? Incluso, podemos preguntarnos ¿en que sentido son inversas la tangencia y la cuadratura?

Tratando de hacer explicito este hecho, diseñamos una secuencia de actividades que tiene como objetivo que a través de los diferentes sistemas de representación (el gráfico, numérico, analítico, algebraico), el estudiante pueda visualizar la relación que existe entre el proceso derivación e integración. Para esto, se proponen ciertas actividades con un objetivo especifico, por lo que de la actividad 1 a la 5 se quiere analizar cuáles son las nociones que el estudiante tiene con respecto a los conceptos derivación e integración y con cuál representación gráfica lo relacionan. Posteriormente de la actividad 5 a la 10 se espera que el estudiante utilice sus nociones básicas sobre dichos conceptos para que mediante la interacción con las actividades del tipo de una ecuación diferencial y con apoyo del método de Euler, el estudiante pueda generar argumentos visuales y así pueda reconocer la relación que existe ente los procesos derivación e integración.

Secuencia de Actividades

En seguida se muestran las actividades:

1. ¿Cómo explicarías a un estudiante de bachillerato el concepto de derivada y qué argumento geométrico utilizarías?
2. ¿Cómo explicarías a un estudiante de bachillerato el concepto de integral y qué argumento geométrico utilizarías?
3. Suponga que $f(x)$ representa la gráfica de cierta función:

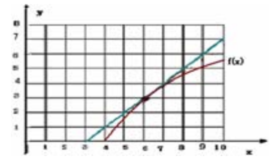
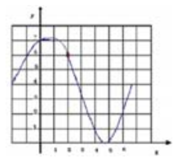


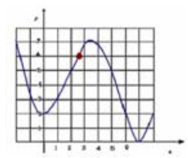
Figura 2.

¿Cuál es la derivada en $x = 6$ de la función f? Justifica tu respuesta.

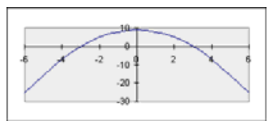
a) 3 b) 6 c) 2 d) 1

4. Dibuja la tangente a la curva que pase por el punto indicado y estima su pendiente m. Justifica tu respuesta.





5. Sea $f(x)$ una función par, cuya gráfica es:



Considera que:

$$i) \int_0^3 f(x)dx = 18$$

$$ii) \int_3^6 f(x)dx = -36$$

Contesta las siguientes preguntas y justifica tus respuestas.

a) ¿Cuál es el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo [0,3]?
b) ¿Cuál es el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo [-3,0]?
c) ¿Cuál es el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo [-3,3]?
d) Encuentra el valor de: $\int_{-3}^{3} f(x)dx$
e) ¿Cuál es el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo [0,6]?
f) Encuentra el valor de: $\int_0^6 f(x)dx$
g) Encuentra el valor de: $\int_{-3}^{6} f(x)dx$

6. De la función $f(x) = x^2$ sabemos que su gráfica es una parábola cuyo vértice es el origen y concavidad hacia arriba; al obtener la derivada resulta otra función que es de primer grado (una recta). Este proceso se estudió en Cálculo Diferencial (Figura 1), pero en Cálculo Integral se tiene el proceso inverso, porque a la función derivada hay que aplicarle el proceso de integración (Figura 2).

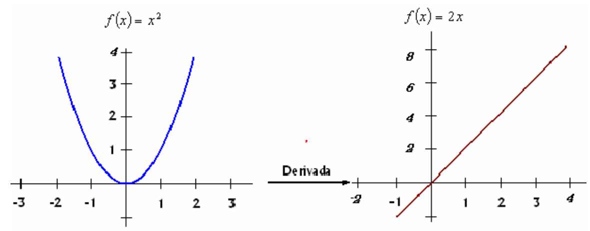


Figura 1.

¿Puedes inferir qué gráfica obtendrás? Explica.

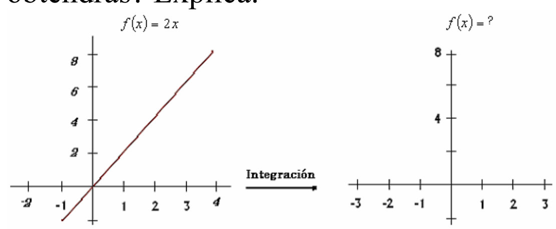


Figura2.

7. Considera la ecuación diferencial $y(x)=y'(x)$, y completa la siguiente tabla considerando los distintos valores para x.

x	$y(x)$	$y'(x)$
0		
0.5		
1		
1.5		
2		
2.5		

a) Localiza los puntos en el plano para trazar la gráfica de $y(x)$, y muestre un segmento de línea tangente en cada uno de los puntos localizados.

b) Traza la gráfica de $y'(x)$.

c) Encuentra una solución para la ecuación diferencial $y'=y$ y bosqueja su grafica.

d) Explica ¿por qué la gráfica de la función solución de la ecuación $y'=y$ no puede cruzar el eje de las x?.

Para conocer el comportamiento cualitativo de la solución de una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad y(a)=b,$$

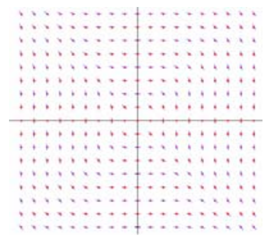
de manera gráfica, se siguen los siguientes pasos:

1. Toma una colección de puntos $(x,y)\in R^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m=f(x,y)$. El conjunto de estos segmentos de recta se conoce como *Campo Direccional.*
2. Traza la curva solución haciendo pasar por los puntos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

8. El siguiente **campo direccional** corresponde a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^2 \qquad y(x_0) = y_0,$$

traza varias curvas solución para la ecuación dada, como se indica en el paso dos, antes mencionado.



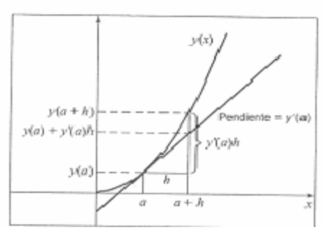
En cálculo con frecuencia encontramos conveniente aproximar la gráfica de una función diferenciable $y(x)$ cercana a un punto $x = a$, por medio de su línea tangente a ese punto.

$$y(x) \approx y(a) + y'(a)(x-a) \qquad \ldots \qquad (1)$$

Una de las técnicas más simples para aproximar soluciones de una ecuación diferencial $y' = g(x, y)$ sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$, es el método de Euler, o de las rectas tangentes. Esta basado, precisamente, en la aproximación local de una función mediante rectas tangentes. Si en la ecuación (1), reemplazamos $x - a$ por h, tendremos:

$$y(a+h) \approx y(a) + y'(a)h,$$

esta aproximación se conoce como aproximación lineal, y es la fórmula del método de Euler, gráficamente se representa de la siguiente forma:



9. Sea la ecuación diferencial $y' = x - y$, junto con una condición inicial $y(0) = 1$. La figura (3.22) muestra el campo de pendientes para la ecuación dada y la condición inicial $(0,1)$, a partir del cual podríamos trazar varias curvas solución.

a) Traza dos curvas solución de $y' = x - y$ sobre el siguiente campo de pendientes.

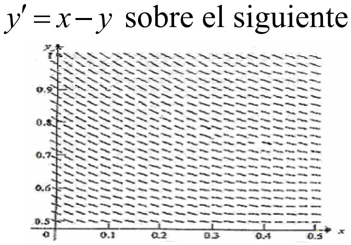


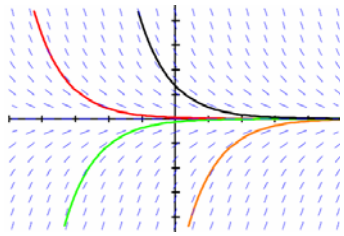
FIGURA 3.22 El campo de pendientes para $y' = x - y$

b) Utilizando la fórmula de Euler, encuentra una aproximación numérica para $y(x)$, cuando $x = 0.5$.

10. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales con su respectiva condición inicial.

a) $\dfrac{dy}{dx} = x + y \quad y(0) = 1$ b) $\dfrac{dy}{dx} = -y \quad y(x_0) = y_0$

Identifica cuál de éstas ecuaciones corresponde al siguiente campo de pendiente. Justifica tu respuesta.



Diseño correspondiente a la Segunda Parte

Para la realización de las Actividades correspondientes a la Segunda Parte, es fundamental considerar las siguientes cuestiones en las que se involucra el objetivo de nuestra investigación:

¿Cómo es que un estudiante podrá intuir la convergencia de una sucesión, o cómo sabrá si un enunciado sobre convergencia de sucesiones es verdadero? Mientras el estudiante tenga más información acerca de las sucesiones, su intuición se podrá aproximar más a las ideas que maneja la lógica con respecto a sucesiones. Uno de los factores que influirá para que su intuición con respecto a la convergencia de sucesiones sea acertada, es la experiencia que tenga en convergencia de sucesiones. Pero ¿cómo es que un alumno podrá adquirir experiencia en la convergencia de sucesiones? Consideramos que la adquirirá mediante la visualización de sucesiones convergentes y de determinadas situaciones en las que se encuentran las sucesiones. Entonces ¿Cómo es que se podrá visualizar una sucesión convergente? ¿Cómo es que logrará representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual acerca de convergencia de sucesiones numéricas? En nuestra opinión, para lograr lo anterior, creemos que se debe trabajar en la construcción de ejemplos y representaciones gráficas de sucesiones numéricas en un eje.

De esta manera, en la primera actividad pretendemos que los estudiantes se familiaricen con la graficación de sucesiones numéricas, para esto proponemos actividades en las que los estudiantes grafican en uno y dos ejes. Posteriormente hacemos algunas preguntas cuyo enfoque es sobre la visualización de una sucesión convergente.

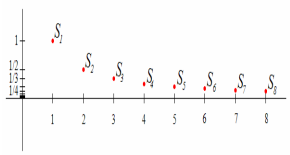
Con respecto a la Segunda Actividad nuestro objetivo es que los estudiantes puedan intuir la veracidad de un enunciado sobre la convergencia de sucesiones, por lo que hemos elegido cuatro representaciones gráficas en un eje, sobre las cuales establecemos varias cuestiones enfocadas principalmente a la visualización de las propiedades de las sucesiones a las que corresponden dichas gráficas.

Primer Actividad

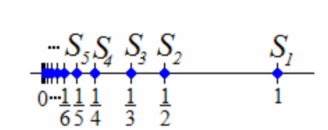
A continuación mostramos dos ejemplos de representación gráfica para la sucesión $S_n = \frac{1}{n}$,

donde $(S_n)_1^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots\right)$

Primer representación



Segunda representación



I. Representa gráficamente (de las dos maneras que se muestran en el ejemplo) las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes:

1) $U_n = \frac{n^3 - 5}{3n^3 + 1}$, 2) $U_n = (-1)^n$,

3) $u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = -1, \cdots, u_n = 2$ para toda $n \geq 5$

4) $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ 5) $U_n = n + 1$

II. ¿Consideras que las sucesiones numéricas anteriores son convergentes? ¿Por qué?

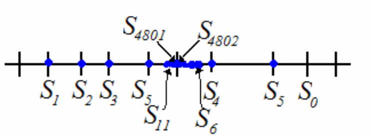
III. Realiza una representación gráfica para una sucesión numérica convergente.

IV. Escribe la definición formal correspondiente a la convergencia de una sucesión numérica.

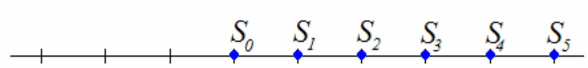
Segunda Actividad

1. Observa las siguientes representaciones gráficas de cuatro sucesiones S_n.

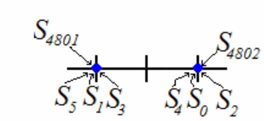
i.



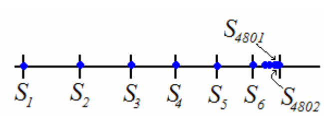
iii.



ii.



iv.



Para cada una de las representaciones anteriores contesta las siguientes preguntas. Explica ampliamente tus respuestas.

a. ¿Hay una infinidad de términos “amontonados” cerca de (ó sobre) algún término?
b. ¿Se puede encerrar en un intervalo de tamaño finito a <u>todos</u> los elementos de la sucesión?
c. Si el caso del inciso anterior se cumple para alguna de las representaciones, ¿Puede suceder que el ‘intervalo’ sea cada vez más pequeño y que aunque no contenga a todos los elementos, el intervalo contenga a <u>la mayoría</u> de los elementos de la sucesión?
d. Si el caso del inciso anterior se cumple, ¿A partir de que S_n crees que podrían estar dentro de un ‘intervalo’ de tamaño finito la mayoría de los términos de la sucesión?
e. Si eliges un tamaño finito para el intervalo, ¿Puedes contar cuántos elementos quedan fuera del intervalo?

f. ¿Consideras que las sucesiones a las que corresponden las representaciones gráficas anteriores son convergentes? De ser así, ¿a qué término convergen? Explica tu respuesta.
2. ¿Cuál(es) de los siguientes enunciados consideras verdadero(s)? ¿Cuáles si y cuáles no? Argumenta ampliamente tu respuesta.
    a. Si S_n es convergente, entonces S_n es acotada.
    b. Si S_n es convergente, entonces S_n no es acotada.
    c. Si S_n es acotada, entonces S_n es convergente.
    d. Si S_n es acotada, entonces S_n no es convergente.
3. Elige uno de los enunciados que consideraste verdadero en la pregunta anterior y
    a. Describe que idea(s) utilizarías para realizar su demostración.
    b. Realiza su demostración formal.

Consideraciones Finales

Con estas actividades pretendemos que profesores y estudiantes reconozcan los múltiples beneficios de la visualización, por ejemplo, el generar argumentos. Buscamos además que a través de ellas se amplíe la visión que se tiene de las matemáticas como una disciplina que no permite la representación visual de sus conceptos. Estamos conscientes de que construir conocimiento, ya sea en el área de Cálculo diferencial e Integral o del Análisis Matemático, es una tarea difícil en la que el trabajo se reduce principalmente a métodos algebraicos y algorítmicos, sin embargo creemos que una visión más amplia en la que se incluya elementos visuales para su estudio puede ayudar en esta tarea.

Reconocimientos

Agradecemos el apoyo económico brindado por medio del proyecto CONACYT 41740-S, para asistir a ésta X Escuela de Invierno en Matemática Educativa.

Referencias

Alcock L. Y Simpson A. (2005) *Convergence of sequences and series 2: interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role.* Educational Studies in Mathematics, 58, 77-100.
Alcock L. y Simpson A. (2004) *Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role.* Educational Studies in Mathematics, 57: 1-32.
Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M. y otros (eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica: México, 97-140.
Barrera, J. (2002). La construcción de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes de Nivel Superior. *Acta Latinoamerica de Matemática Educativa*, 15(1), México: Grupo Editorial Iberoamérica. 67-72.
Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 32-115.

Cáceres, A. (1997), *Estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años de edad*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Epsilon*, Núm. (42), 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1997). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Epsilon*, Num. (42), 353-369.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas,* España 55*,* (pp. 3 – 22).

Cantoral R. y Montiel, G. (2001) *Funciones: visualización y pensamiento matemático,* México: Pearson Educación de México.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(2), 133-154.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (1997) *Aproximaciones sucesivas y sucesiones.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Cauchy, A. (1994) *Curso de Análisis* (Álvarez, C. Selección, trad. y notas) México: UNAM. (Trabajo original publicado en 1821).

Cordero, F. (2005) El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 8-3, pp. 265-286

Crespo, R. (2005) Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, 3, 287-317.

Dolores, C. (2000) *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada.* El futuro del Cálculo Infinitesimal. Capitulo V: ICME-8 Sevilla, España: Iberoamérica, México, DF, 155-181.

Farfán, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Holland: Reidel Publishing.

Galindo, E. (1998). *Un acercamiento a algunas Ideas del Cálculo diferencial empleando Logos y programas para graficar.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN, México, DF.

Polya, G. (1966) *Matemáticas y razonamiento plausible,* España, Madrid: Tecnos.

Robert, A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3, 3, 305-341.

LA EVOLUCIÓN DE UNA PRÁCTICA SOCIAL: EL CASO DE LA PREDICCIÓN

Herminio Alatorre, Iván López, Carolina Carrillo
Universidad Autónoma de Guerrero-Cimate
alatorreherminio@yahoo.com.mx, jilopez@cimateuagro.org, ccarrillo@cimateuagro.org
Reporte de investigación

Resumen
Este escrito reporta los avances de una investigación de tipo histórico bibliográfico acerca del carácter evolutivo de las prácticas sociales, constructo teórico fundamental en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. Se analiza el caso particular de la predicción, ejemplo paradigmático de la Socioepistemología.
La práctica social, como constructo teórico, ha sido manejada al seno de la Socioepistemología como estática, en el sentido de que si se habla de la práctica social de la predicción, ella misma es caracterizada a través del discurso como un ente que no es susceptible de cambios o evolución al paso del tiempo.
Esta investigación caracteriza a la predicción como una práctica social que presenta una evolución en dos ramas: por un lado, la construcción científica que desemboca en lo que escolarmente se conoce como Cálculo, Análisis, Ecuaciones diferenciales; y por otro, a partir del descubrimiento de una función continua en todos sus puntos y no derivable en ninguno de ellos, la creación de un conocimiento matemático específico, conocido hoy como geometría fractal; cabe señalar que esta rama ha sido poco observada desde la Socioepistemología. Estas dos ramas se caracterizan desde esta investigación como predicción determinista y predicción no determinista, respectivamente.
Se mostrarán algunos pasajes de la evolución de la segunda rama, que servirán para sustentar la hipótesis de que las prácticas sociales pueden presentar etapas de evolución.

Palabras clave: Socioepistemología, práctica social, evolución, predicción.

Introducción

La Socioepistemología es una aproximación teórica emergente dentro de la disciplina científica denominada Matemática Educativa. El objetivo de la Matemática Educativa es explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático, cómo desarrollan una manera matemática de pensar. Dentro de esta disciplina la Socioepistemología ha hecho planteamientos novedosos poniendo al centro de la discusión, más que a los conceptos, a las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento (López, 2005).
Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando en sobremanera el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La Socioepistemología, por su parte, plantea el examen del conocimiento socialmente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales (Cantoral y Farfán, 2003, 2004).

> Esta aproximación teórica de naturaleza sistémica permite tratar a los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple incorporando el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2003).

Al ser una aproximación teórica emergente en el campo tiene aún problemas teóricos por resolver, uno de ellos es el relativo a la precisión/caracterización/definición de lo que es una práctica social (López, 2006). Muestra de ello es que, dentro del cúmulo de trabajos que se han realizado al seno de la Socioepistemología, existen diversas caracterizaciones y usos de este constructo teórico.

El objeto de estudio de esta investigación son las prácticas sociales, es de particular interés indagar acerca de su naturaleza, en especial sobre su estado de *concepto teórico estático o evolutivo.* Desde luego, nuestro interés es también contribuir con las caracterizaciones que hasta ahora se han hecho, estructurando una caracterización que coadyuve a desarrollar la aproximación teórica socioepistemológica.

A continuación presentamos algunas de las precisiones/caracterizaciones/definiciones que en torno a la práctica social se han hecho podemos citar, por ejemplo, a

Cordero (2001), quien refiere lo siguiente sobre la práctica social:

> Lo socioepistemológico debe significar el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y, en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana. Esta relación compone categorías del conocimiento matemático que son el núcleo para reorganizar la obra matemática.

Arrieta (2003) se afirma que:

> …el concepto de "práctica" connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido la práctica siempre es una *práctica social*.

Martínez (2003) señala que:

> …¿qué es lo que permite construir conocimiento?, pues adquiere un marco de referencia específico y la respuesta apunta hacia la caracterización de *escenarios* centrados en *prácticas sociales*, que puede ser fomentada en la escuela, de integración sistémica de conocimientos matemáticos; en donde la convención matemática sería un consecuencia particular de tal práctica. Entonces, la conformación de tal escenario representa la posibilidad teórica de ser la que posibilite la construcción de otros conocimientos que adquieren su sentido en y para una organización sistémica de conjuntos de conocimientos.

En Rosado (2004) se cita en cuanto a la práctica social lo siguiente:

> Todo ello, nos hace investigar y desarrollar conocimiento con la creencia de que el conocimiento se resignifica al paso de nuestra vivencia institucional, lo que obliga a considerar a la actividad humana o prácticas sociales como los generadores del conocimiento. Éstas son propias de las formas de organización de los grupos humanos, reflejan sus pensamientos, resignificaciones y argumentaciones orientadas por las intenciones para alcanzar los consensos requeridos. Pero que esta perspectiva no ha sido tomada en cuenta como una base para la didáctica de la matemática, lo que nos compete demandar tal tarea.

En Buendía (2004) se reporta que:

> Por *social*, no nos referimos a algún tipo de equivalencia con *vida cotidiana*; cuando entendemos las matemáticas como una construcción social, pretendemos enfatizar las prácticas sociales que permiten generación de conocimiento matemático.
>
> Lo *socio* no se reduce a explicar la construcción de un conocimiento matemático como resultado de la interacción entre individuos. Bajo ese enfoque, el saber se percibe como

> preexistente y único, válido universalmente; mientras que si es percibido como producto de prácticas realizadas el seno de comunidades, este saber se problematiza y sólo puede ser entendido dentro del escenario que lo hace posible. De ahí que hagamos énfasis en que la matemática toma sentido y significación a partir de prácticas no exclusivas de la misma estructura matemática; sino de aquéllas que pertenecen a un universo sociocultural mayor.

En Flores (2005):

> Tal aproximación, obliga a formular epistemologías del conocimiento cuyo aspecto medular no está en los conceptos, sino en la constitución social de tales conceptos, en "aquello" que hace que el conocimiento sea así y no de otra manera. El "aquello" es de naturaleza social que reconoce al grupo humano con su organización, su historia, su cultura y su institución que lo lleva a proceder de una manera y no de otra, es su *práctica social* generatriz de su conocimiento.
>
> Todo lo anterior conlleva cuestionar ¿por qué lo matemático es referido a objetos? y no a "aquello" que obliga a construir los objetos, es decir, a las "prácticas sociales" que norman la construcción de los objetos matemáticos. El mismo cuestionamiento está proveyendo de categorías que no habían sido identificadas en los tradicionales tratamientos de las epistemologías del conocimiento.

En Montiel (2005), se reporta:

> Es claro también que estas producciones pertenecen a cierta tradición científica, sin embargo, lo que nos interesa es identificar aquello que las regula, las norma, la práctica social. La práctica social ha sido caracterizada por medio de actividades sujetas a condiciones de un contexto particular, contexto que a su vez es determinado por las prácticas de referencia. Ello ha llevado a identificar los fenómenos, los problemas, las circunstancias y las herramientas asociados al conocimiento matemático involucrado en ámbitos no escolares, pues es ahí donde nace y se usa dicho conocimiento.
>
> …la actividad como aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos, la práctica de referencia como un conjunto articulado de actividades, también como aquella que permite la articulación de la actividad con la práctica social, la práctica social como reguladora (normativa) de la práctica de referencia y sus actividades relacionadas.

En este repaso de caracterizaciones tratadas a lo largo de un lustro, podemos mirar la gran variedad de ellas que existen, uno de los objetivos de este trabajo es colaborar en la precisión de este constructo teórico; para efectos de este trabajo se tomará como caracterización inicial de práctica social aquella que se encuentra más cercana a la práctica social de la predicción, aquella que afirma que *la práctica social surge de una necesidad sociocultural y posibilita o permite la construcción de conocimiento, pero no cualquier conocimiento, sino un conocimiento específico* (en el caso específico de la predicción es lo permitió o posibilitó la construcción de lo que se conoce escolarmente como Cálculo, Ecuaciones Diferenciales y Análisis Matemático).

En esta investigación se analiza a la predicción, la práctica social más estudiada por la Socioepistemología, de hecho considerada como el ejemplo paradigmático (López, 2006) en el sentido de Kuhn, y se rescata una característica que, sostenemos, debiera ser tomada muy en serio. Estamos hablando del carácter evolutivo de las prácticas sociales, como una posibilidad.

Miremos algunas de las precisiones que se han hecho en torno a la práctica social de la predicción:

> La idea de *predicción* es, sin lugar a dudas, la idea de mayor importancia en el estudio de los fenómenos de cambio en la naturaleza. Se trata siempre de adelantarse a los acontecimientos, de revelar lo que habrá de suceder. Sin embargo el problema queda

> resuelto hasta que se precisa cómo es que se logra la *predicción* y de qué manera estaremos ciertos de nuestra conjetura. En el caso de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, la *predicción* se obtiene a través del estudio de la ley que gobierna el comportamiento del sistema, ley que se encuentra mediante el estudio de la variación, más pequeña, más básica, más elemental que podamos estudiar: el elemento diferencial. Sin embargo, la *predicción* para ser legítima debe construirse exclusivamente con datos que se posean desde un inicio. En este sentido, un resultado de este estudio permitió conferirle a la *Serie de Taylor* el papel de instrumento predictor por excelencia (ya que en él quedan impresas todas las formas discutidas de la *predicción*). Este resultado apunta hacia dónde pudiera buscarse una reconstrucción del discurso matemático escolar para el cálculo.
>
> En otro nivel del problema, el psicogenético, permitió reconocer y analizar, los mecanismos de tipo cognoscitivo que operan cuando se trata de predecir el comportamiento de un sistema fluido. Resaltándose los procedimientos de Constantificación (un caso de los principios de conservación), el crecimiento con herencia, y la centración natural en el estudio de la *diferencia fundamental* (Cantoral, 2001).

Cantoral, Molina y Sánchez (2005) reportan en torno a la predicción que:

> La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa, centra su atención en el examen de las prácticas sociales que favorecen la construcción del conocimiento matemático, incluso antes que estudiar a los conocimientos mismos. En este sentido, hemos considerado a lo largo de diferentes investigaciones (Cantoral y Farfán, 1998) que una de tales prácticas es la *predicción*. La imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad, obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad. Este enfoque centrado en prácticas debe entenderse en el marco de las dimensiones sociales. Se aboca al estudio de la interacción y la convivencia en el ejercicio de las prácticas de referencia.

La predicción es, como resultado de los estudios de la aproximación socioepistemológica, el "eje" que permitiría un rediseño del discurso matemático escolar, alrededor de lo que actualmente se conoce como cálculo, análisis y ecuaciones diferenciales.

Sin embargo, si miramos uno de los trabajos fundacionales de la Socioepistemología (Cantoral, 1990, 2001), se pueden mirar aparentes estados de la noción de Praediciere, donde estos estados se caracterizan como esquema, modelo y teoría; caracterizando a cada uno de ellos como cada vez de mayor profundidad teórica, sostenemos que aún cuando se presenta en forma evolutiva, no lo es tal, ya que *la esencia de lo que es la predicción sigue presente de manera intacta en cada una de las partes*.

En Cantoral (2001) se rastrea y analiza "la producción intelectual de científicos, filósofos naturales de los siglos diecisiete, dieciocho; ingenieros, físicos y matemáticos de los siglos diecinueve y veinte, incluyendo por supuesto a los partícipes del proceso educativo y científico contemporáneo", esta obra nos presenta la forma en que la predicción se constituye como programa de investigación desde el siglo diecisiete al veinte (*noción estática en el tiempo*).

Se muestra cómo una de las obras máximas de este programa científico fue la serie de Taylor, si analizamos este resultado desde lo que hasta ahora ha construido la Socioepistemología llegaríamos a la conclusión de que si se conoce cómo es una función (sistema) en un punto, digamos x_0, y cómo son todos sus cambios en ese punto, entonces es posible conocer cualquier estado posterior del sistema (x_0+h), pues dicha serie nos permite conocer de *manera puntual el valor puntual de* $f(x_0+h)$, si f es pensado como el sistema de referencia (la función) (Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R., 2003).

Un ejemplo, característico de la forma de concebir lo anterior se presenta en Cantoral, et al (2003):

> La ley de desintegración del radio dice que la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad inicial de radio. Supongamos que en cierto instante $t=0$ se tienen R_0 gramos de radio. Se desea saber la cantidad de radio presente en cualquier instante posterior t.
>
> Si $R(t)$ representa la cantidad de radio en cualquier instante t y la velocidad de desintegración está dada por $-dR/dt$, entonces $kR = -dR/dt$ (con k constante). Usando la idea de predicción que hemos presentado anteriormente, el problema consiste en anunciar el valor posterior en términos de los datos iniciales: $0, R(0), R'(0), R''(0),$ etc., de ahí que la ecuación buscada se exprese, de nueva cuenta, mediante la serie de Taylor:
>
> $$R(t) = R(0) + R(0)t + R''(0)t^2 /2! + \dots \quad (11)$$
>
> A partir de la ecuación diferencial que regula el comportamiento entre las variables tenemos que, $R'(0) = -kR(0),\ R''(0) = -kR'(0) = k^2R(0),$ etc. Por tanto, la expresión (11) adquiere el aspecto:
>
> $$R(t) = R(0) - kR(0)t + k^2 R(0)t^2 /2! - k^3 R(0)\, t^3 /3! + \dots$$
> $$= R(0)\{ 1 – kt/1! + (kt)^2 /2! - (kt)^3 /3! + (kt)^4 /4! - (kt)^5 /5! +\dots \} = R(0)\{ e\text{-}kl\} = R_0\, e^{-kt}$$

El programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo con el programa lagrangiano donde emerge la noción de función analítica (Cantoral, 1990).

Metodología o Métodos

La Matemática Educativa es una disciplina científica que se encuentra en los cruces de varias disciplinas, digamos por citar algunas, la psicología, la matemática, la filosofía, la epistemología, la pedagogía. Si bien es cierto que toma resultados y métodos de estas disciplinas, ninguna por sí sola puede definir su objeto de estudio. Desde luego este trabajo se encuentra cercano a lo que se hace desde la Epistemología y la Filosofía de la Ciencia; en sí, es un trabajo teórico al seno de la Socioepistemología que retoma los estudios de índole *histórico bibliográfico*, centramos nuestra atención de manera prioritaria en las precisiones/caracterizaciones/definiciones que existen de la práctica social, resaltando aspectos de las dimensiones epistemológica y social, poniendo en segundo plano, aspectos relativos a las componentes didáctica y cognitiva, dada la naturaleza teórica de la investigación; se parte de un análisis profundo de las obras tanto de la Socioepistemología como de las que reportan los hechos históricos alrededor de los fractales así como de aquellas que presentan tratados sobre el contenido matemático propio del mismo tema.

Resultados y Discusión

Como resultado de este análisis histórico bibliográfico se encontró un “punto de quiebre” de la idea de predicción, se señala el día 18 de julio de 1872, como aquel en que Karl Weierstrass, presentó a la Real Academia de Prusia un resultado contradictorio a todas luces dentro del programa Newtoniano, las construcciones teóricas hechas que tenían como eje a la predicción estaban hechas para fenómenos de variación suave, en términos matemáticos podrían reinterpretarse como derivables y se presentaba “una función continua en todos sus puntos, pero que no era derivable en ninguno de ellos” (la idea original estaba en términos de cocientes de diferencias bien-definidos).

Ejemplos como éste se multiplicaron, entre los que podemos citar los de Cantor (1884), Khoch (1904), sin embargo en un inicio, dada la falta de elementos teóricos para tratarlos eran desechados y cuando un matemático se encontraba con alguno de esos casos “patológicos” (ahora llamados *fractales*) eran desechados y tratados como “monstruos”.

Fue hasta el año de 1918 cuando se dieron los primeros elementos que permitieron el estudio sistemático de este tipo de casos patológicos. Felix Hausdorff descifra la característica fundamental de los fractales, el concepto de dimensión no entera (desde una perspectiva euclidiana, un cuerpo sólo puede ser de una, dos o tres dimensiones).

Cabe señalar que a partir de este punto es que se potencia este tipo de sistemas, con la llegada de las computadoras en los setentas, las aplicación de los fractales se vieron multiplicadas.

Entre los grandes impulsores “modernos” podemos citar a Mandelbrot (1967).

Hasta este momento se han presentado los hechos históricos, pero la pregunta fundamental para continuar con este trabajo es:

¿Puede explicarse el estudio de los fractales a la luz del concepto teórico de la predicción como práctica social?

Si se parte de que la esencia de la predicción radica en la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad y que este hecho obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad, podemos afirmar entonces que la predicción, como hasta ahora se conoce en términos socioepistemológicos, es una forma en la que se pretende *entender* y *anticipar* lo que va a suceder con cierto sistema. Los estudios sobre los fractales tienen las mismas pretensiones, se busca *entender* y *anticipar* lo que sucederá con algún sistema, la diferencia fundamental radica en la forma en que se da ese “entendimiento”, a la luz de la forma clásica de la predicción socioepistemológica se busca de manera puntual calcular un $f(x_0)$, donde la f determina un sistema de variación suave que es uno de los supuestos tras el programa de investigación newtoniano; mientras que por otro lado, esta determinación de la $f(x_0)$ no es posible. Esto nos hace caracterizar a estas dos “ramas” de la predicción como predicción determinista y predicción no determinista.

A manera de ejemplo de cómo funciona la idea de predicción no determinista analizaremos el siguiente sistema determinado como sigue:

Consideremos un problema de la ecología, cómo evoluciona en el transcurso del tiempo una población determinada, digamos de insectos. Si sabemos cuántos insectos hay en este año, podemos preguntarnos ¿Cuántos insectos habrá el próximo año, el siguiente, y así sucesivamente?

Una función que modele este fenómeno pudiera ser $y=qx(1-x)$, ya que esta función hace que para valores pequeños de x, la curva crezca y para valores grandes disminuya.

Por conveniencia se tomó a la x y la y como entre cero y uno. Y por lo tanto el valor de q estará entre 0 y y. Cero representa extinción y el valor uno el máximo posible de la población.

Al paso del tiempo, para un valor de digamos q=2.5, tenemos que, para un valor inicial de x=0.7 se genera la siguiente secuencia de valores iterados para x:

0.525, 0.6234, 0.5869, 06061, 05992, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600,…

Estos resultados indican que la población se estabiliza al paso del tiempo.

Si empezáramos con un valor de x=0.25 y conserváramos el valor de q=2.5, se tendría la siguiente secuencia:

0.4688, 0.6226, 0.5874, 0.6059, 0.5970, 0.6015, 0.5992, 0.6004, 0.5998, 0.6001, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600…

Se tiene entonces que se llega al mismo valor, no importando el valor inicial.

Este resultado nos indica que la población no crece indefinidamente al paso del tiempo y que además, al paso de algunos años la población alcanza un valor que no depende de cuál haya sido el valor inicial.
Si se vuelve a repetir este procedimiento pero para otro valor de q, se obtendrá otro valor final. Por ejemplo, si q=2.7, la sucesión se acerca a 0.6296.
Se puede mostrar que si q está entre cero y uno, la población se extingue (la sucesión siempre va hacia cero).
¿Qué pasará con valores mayores que uno? Si se analiza el caso q=3.3 con x=0.6, se tiene que

0.7920, 0.5436, 0.8187, 0.4898, 0.8247, 0.4772, 0.8233, 0.4801, 0.8737, 0.4779, 0.8236, 0.4795, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794…

Se tiene que la población "salta" a dos valores, ya no sólo a uno (periodo dos).
Si ahora se toman los valores q=3.5 y x=0.6, después de varias iteraciones se tiene que los valores finales son cuatro:

0.3038, 0.8260, 0.5001 y 0.8750 (periodo 4).

Para q=3.55 y x=0.6, se tienen ocho valores:

0.3548, 0.8127, 0.5405, 0.8817, 0.3703, 0.8278, 0.5060 y 0.8874.

Para el caso q=3.6, por más iteraciones que se hagan no es posible encontrar una sucesión de números que se repita, parecen escogidos al azar y de hecho se generará una sucesión distinta para cada valor distinto de x.

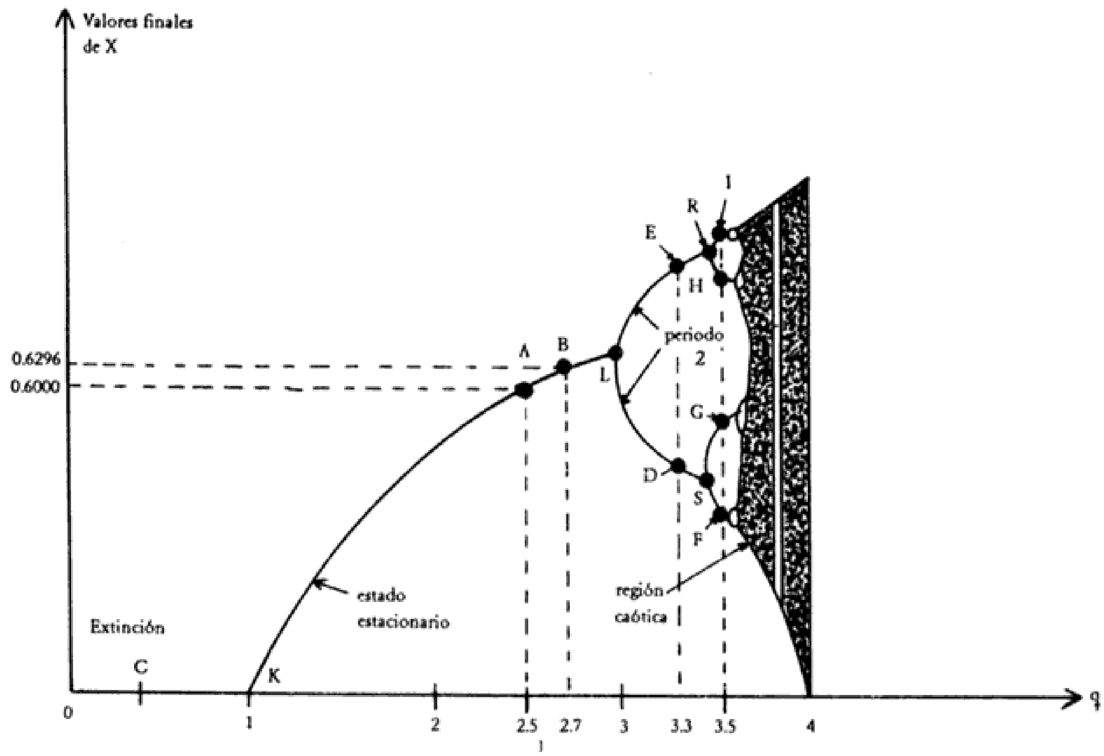


Figura 1. Gráfico de q contra los valores de estabilización.

Si analizamos la Figura 1, gráfico generado por computadora, resulta que existen infinidad de regiones en las que no es posible encontrar un número finito de valores estables, sin embargo sabemos cómo es que se comporta el sistema en términos generales.
Podemos entender los estados por los que atraviesa el sistema a través de los cambios de q a medida que crece:

Extinción, un solo valor final, periódicos con periodicidades 2, 4, 8, 16,…, caótico, periódicos con periodicidad 3, 6, 9…, caótico,…

Éste es un ejemplo clásico de los que podemos encontrar en los libros de introducción a los fractales y al estudio del caos.

Si lo comparamos con las preguntas hechas al seno de la aproximación socioepistemológica la cuestión:

¿Cuántos insectos habrá el próximo año, el siguiente, y así sucesivamente?

pudiese ser entendida en términos de la predicción determinista, como la pregunta del ejemplo que se cita anteriormente de Cantoral, et al (2003), el mismo intento de buscar una función puede entenderse en el mismo sentido. Sin embargo, observando el gráfico generado por computadora, se entiende perfectamente que habrá ciertos valores para los cuales no será posible determinar exactamente el número de individuos en la población, pero que si bien esto no es posible sí se puede explicar el comportamiento del sistema, a través del esquema:

Extinción, un solo valor final, periódicos con periodicidades 2, 4, 8, 16,…, caótico, periódicos con periodicidad 3, 6, 9…, caótico,…

La idea de lo que es predicción determinista y predicción no determinista queda establecida entonces de manera no ambigua.

Las características de estos nuevos entes son diversas, su autosimilitud, su dimensión fraccionaria, su dificultad para tener buenas representaciones gráficas, los hacen un terreno fértil para ser cultivado desde la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa.

Conclusiones

Esta investigación pone en un primer plano el constructo teórico "práctica social". Vía una revisión histórico bibliográfica plantea la posibilidad de una evolución en las prácticas sociales, dando evidencia de esta evolución mediante el análisis de la predicción, mostrando que existen al menos dos tipos de predicción: la determinista y la no determinista.

Este carácter evolutivo que presenta la predicción debiera ser un punto de reflexión en torno a las caracterizaciones que sobre la noción de práctica social se hagan en un futuro.

Por otra parte, esta investigación será punta de lanza para posteriores trabajos con miras a la precisión de la naturaleza epistemológica, cognitiva y didáctica de lo que hoy se conoce como la geometría fractal.

Referencias Bibliográficas

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas: México.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Braun, E. (1996). *Caos, Fractales y cosas raras*. Fondo de cultura económica.México. En: http://lectura.ilce.edu.mx:3000/biblioteca/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/150/htm/caos.htm

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico).* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de "el Praediciere" y "lo Analítico"*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson.

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003). *Mathematics Education: A vision of its evolution. Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherthelands. Vol. 53, Issue 3, 255 – 270. Disponible en http://cimate.uagro.mx/cantoral/.

Cantoral, R., Molina, G., Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama (Ed.), Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*(1), 463 – 468.

Cantor, G (1884). On the Power of Perfect Sets of Points. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* Vol. 4. Núm. 2, pp. 103-128.

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio Socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

Hausdorff, F. (1918). Dimension and Outer Measure. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

Koch, H. (1904). On a Continuous Curve Without Tangent Constructable from Elementary Geometry. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

López, J.; Cantoral, R. (2006). La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad. *Acta de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Ediciones Clame: Uruguay.

López, I. (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México. Disponible en http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/.

Mandelbrot, B. (1967). How Long is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractal Dimension. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México. Disponible en http://www.cimateuagro.org/tesis/2003/docgustavo/p.pdf

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

Weierstrass, K. (1872). On continuous function of a real that do not have a well-defined differential quotient. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

ESTUDIO CUALITATIVO SOBRE LA REPROBACIÓN DE CÁLCULO EN EL ÁREA DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y COMPUTACIONALES

Eddie Aparicio, María Guadalupe Ordaz
Universidad Autónoma de Yucatán
alanda@uady.mx, oarjona@uady.mx
Reporte de investigación

Resumen

El escrito reporta los resultados de un estudio diagnóstico sobre la situación de reprobación y rezago en cálculo de nivel superior y posibles factores académicos asociados a dicho problema. Particularmente, se discute sobre el tipo de dificultades que presentan estudiantes después de haber cursado y aprobado sus dos cursos de cálculo (diferencial e integral) y las creencias del profesorado respecto a la asignatura de cálculo y su papel en los planes de estudio.

Palabras clave: Reprobación, cálculo, programas, profesores

Introducción

La didáctica de la matemática en tanto disciplina científica de naturaleza social, toma como principal objeto de estudio, los fenómenos didácticos asociados a la comunicación (enseñanza) y producción (generación de aprendizajes) de conocimientos matemáticos a fin de impactar de manera eficaz en la educación matemática. En este sentido, se ha presenciado un importante crecimiento en la producción de teorías que buscan dar cuenta de complejidad que guardan tales fenómenos didácticos, tómese como ejemplo de estas teorías, la teoría cognoscitivita de Vergnaud, la teoría Antropológica de Chevallard, la teoría sociocultural de Brousseau, la teoría de las representaciones semióticas de Duval, por mencionar algunas.

Sin duda los recursos teórico metodológicos que ofrecen cada vez más la Epistemología, la Psicología, la Didáctica y la Sociología han permitido generar explicaciones más integradas sobre la naturaleza de los fenómenos que se producen en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Un ejemplo de ello es la emergente aproximación teórica Socioepistemológica que busca incidir en el *discurso matemático escolar* a partir del estudio sistémico de las problemáticas de aprendizajes matemáticos vía su enseñanza.

En décadas recientes, se ha fortalecido el interés de investigar sobre fenómenos ligados al aprendizaje del cálculo diferencial e integral. Artigue (1995) señala, la complejidad de dicha problemática refiriéndose a sus inicios durante el siglo XX motivado por la masiva incursión de la enseñanza del cálculo en el bachillerato francés. Recientemente Hoffman, et al., (2004) discurren sobre una posible crisis en la enseñanza contemporánea del cálculo universitario y de la necesidad de un cambio de paradigma. Cambio que resulta de considerar las nuevas tecnologías de la información y muy especialmente de atender a las “bondades” que brinda la matemática computacional.

Pese a la creación de diversas teorías especializadas en didáctica de la matemática y a los desmedidos avances tecnológicos, en nuestras sociedades se sigue sufriendo el problema de una excesiva reprobación y rezago escolar en la educación general, y en matemáticas en particular. Si bien este problema de reprobación y rezago escolar en el área de matemáticas (indistintamente del nivel educativo del que se hable) pareciera para muchos algo que se ubica dentro de lo “normal”, para otros no lo es tanto. A nuestro modo de ver, este problema adquiere una connotación especial dentro la didáctica de la matemática o matemática educativa en Latinoamérica, pues una buena parte de sus génesis deviene del funcionamiento del sistema didáctico: *profesor* (o institución), *alumno* (o sociedad) y *saber* (currículo), de aquí que este estudio se refiera a este problema desde un análisis del funcionamiento del sistema didáctico en su forma extendida: *institución, alumnos y currículo.*

La reprobación en general y la reprobación en matemáticas en particular, es una de las causas que provocan el rezago y la deserción escolar en los niveles educativos y que finalmente terminan por cobrarles costosas facturas a la sociedad. Por ejemplo, en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), desertan el 30% de los 35,000 alumnos que ingresan a alguna de las 68 licenciaturas, y por tal motivo la sociedad mexicana pierde 262 millones 500 mil pesos anuales en alumnos que no concluyen su carrera profesional como lo señala Rodríguez (2000) citado en García (2006a). Datos ofrecidos por Díaz de Cosio (1998) citado en Martínez (2002) señalan que en promedio nacional, de cada 100 alumnos que inician estudios de licenciatura, entre 50 y 60 concluyen las materias del plan de estudios cinco años después, de los cuales, sólo 20 logran obtener su título. Así mismo, en el trabajo de Chaín (1999) citado en García (2006a) se refiere que aproximadamente 25 de cada 100 estudiantes que ingresan al nivel universitario abandonan sus estudios sin haber promovido las asignaturas correspondientes al primer semestre; además, la mayoría de ellos inicia una carrera marcada por la reprobación. Cabe señalar que una buena parte de las asignaturas que presentan mayor índice de reprobación pertenecen al área de matemáticas.

Albert (1996) citado en Reséndiz (2004), menciona que es precisamente al momento de intentar llevar a las *aulas* el contenido teórico y práctico del cálculo que se observa una problemática propia de su enseñanza y aprendizaje, convirtiéndose en uno de los factores causales de la deserción estudiantil en instituciones públicas y privadas de nuestro país.

En este sentido, se puede decir que no es producto de la casualidad que los programas de curso en Ingenierías y Ciencias exactas otorguen mayor tiempo de estudio a la asignatura de cálculo y que las instituciones de educación superior (IES) realicen innumerables esfuerzos por mejorar los altos índices de reprobación y rezago e intentar mejorar el grado de aprovechamiento de los estudiantes, tal se ha indicado en el comunicado presentado por la ANUIES en el año 2001 en donde se señala que cada institución debe “diseñar estrategias e instrumentar acciones que tengan como propósito incrementar la calidad del proceso formativo integral de los estudiantes, aumentar su rendimiento académico, reducir la reprobación y la deserción escolar, y lograr índices de aprovechamiento y eficiencia terminal satisfactorios”.

Sin duda, las IES han buscado desarrollar proyectos de investigación que ofrezcan información sobre las causas y comportamiento de dicho fenómeno, sin embargo y en mi opinión, dichos proyectos presentan una limitante, a saber, que al basar sus estudios en métodos y técnicas cuantitativas de investigación (recolección de datos a nivel masivo y con la aplicación de cuestionarios centrados en aspectos de tipo sociocultural, socioeconómicos, de orientación vocacional, de hábitos de estudio e incluso de infraestructura institucional), excluyen aspectos más específicos, por ejemplo, las prácticas de aula, el comportamiento de las y los estudiantes, las costumbres didácticas del profesorado, el análisis del discurso matemático escolar, la estructuración de contenidos temáticos, entre otros, y que a nuestro entender, resultan cruciales en el estudio y tratamiento de tales problemas.

Bajo esta visión y de la consideración de que este tipo de problema encierra una naturaleza causal multifactorial, se desarrolló durante dos años, una investigación de carácter cualitativo sobre el fenómeno de reprobación y rezago escolar en la asignatura de cálculo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. La idea básica por desarrollar una investigación cualitativa se debió a que ésta tiene las características de: 1) No contar con un solo método, sino variaciones de método; 2) Comprender múltiples realidades; 3) Ofrecer una visión holística del mundo; 4) Es interdisciplinaria; 5) Responde a situaciones de índole sociopolítico como proceso y producto de la investigación, como lo señala Sieburth (1993).

Coincidimos con la autora por ejemplo, al referir que los alcances de la investigación cualitativa no se ven limitados a la descripción o identificación de problemas educativos, sino a la generación de alternativas y de promoción de formas de participación social para transformar dichos problemas. Cabe decir que el trabajo que aquí se presenta es el resultado de un grupo de trabajo de profesores e investigadores en el área de Matemática Educativa como en Matemáticas y que en la actualidad forman parte del personal académico de mencionada facultad.

Consideraciones metodológicas

Como se ha señalado con anterioridad, nuestra investigación se basó en el empleo de la metodología de la investigación cualitativa, a fin de llevar a cabo un estudio sistemático e integral sobre el tipo de factores académicos presentes en el problema de reprobación y rezago en cálculo. Así por ejemplo, se puso en juego la realización de estudios de corte etnográfico para dar cuenta de las costumbres didácticas del profesorado al interior de las aulas; se abordó el estudio del escenario escolar con sus actores principales: *profesor, alumno y saber*; y las interacciones que entre ellos se suscita. Esto, bajo el supuesto de que la descripción y caracterización de dicho contexto, habrá de proveer referentes importantes sobre la forma en que se genera y difunde el conocimiento matemático al seno de las aulas de clase. El problema de reprobación en cálculo a nivel superior al ser abordado por la metodología de la investigación cualitativa, nos permitió atender aspectos locales que con otras metodologías se hubiesen dejado de lado. Auxiliándonos de la unidad mínima de análisis que utiliza la didáctica de la matemática (relaciones entre profesor-saber-alumno) y considerando una extensión de ésta, *institución-currículo-sociedad*, es que se desarrollaron actividades precisas a dar información sobre cada aspecto.

Entre las actividades desarrolladas, destacamos: El análisis de libros de cálculo respecto a la coherencia de los contenidos, enfoques y objetivos declarados en los programas de curso; análisis de la forma en que está organizado el cálculo y los enfoques con el que se enseña; un estudio sobre el tipo de dificultades que presentan algunos estudiantes al momento de tratar contenidos específicos del cálculo, por ejemplo, límite, derivada y sucesiones; recolección, análisis y documentación de información cuantitativa sobre los índices de reprobación, rezago y deserción de la asignatura de cálculo de cuatro generaciones (2001- 2004).

Estas actividades y los resultados obtenidos en cada una de ellas, permitieron tener un panorama más amplio y preciso del problema de investigación. En lo sucesivo se expondrán algunos de los hallazgos logrados.

Resultados

Un indicador cuantitativo

El porcentaje de reprobación y rezago que la facultad ha presentado en los últimos años (cabe señalar que de dos años a la fecha ha habido una mejoría) ha oscilado entre el 25 y 30% al término del primer año de estudio. En este sentido, los indicadores de egreso no han sido nada alentadores, por ejemplo, la generación 2001-2005 correspondiente a la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, sólo logró concluir sus estudios el 13.8% de un total de 36 alumnos. De igual manera, de la generación 2002-2006 de la misma licenciatura, sólo lograron concluir sus estudios en el tiempo designado, el 24% de un total de 29 alumnos. Véase también la siguiente tabla:

Generación	Cursos		Reprobados		Rezagados		Desertores	
	Cálculo I	Cálculo II	*Cálculo I*	Cálculo II	*Cálculo I*	Cálculo II	*Cálculo I*	Cálculo II
Sep 2001	*41*	26	*37*	25	*21*	14	*8*	12
Feb 2002	*36*	23	*28*	22	*25*	11	*11*	2
Sep 2002	*39*	32	*31*	14	*26*	5	*11*	2
Feb 2003	*34*	26	*22*	4	*17*	4	*4*	3
Sep 2003	*74*	69	*10*	35	*8*	23	*0*	

Tabla 1. Reprobación y rezago en las asignaturas de Cálculo I y Cálculo II de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, por generación.

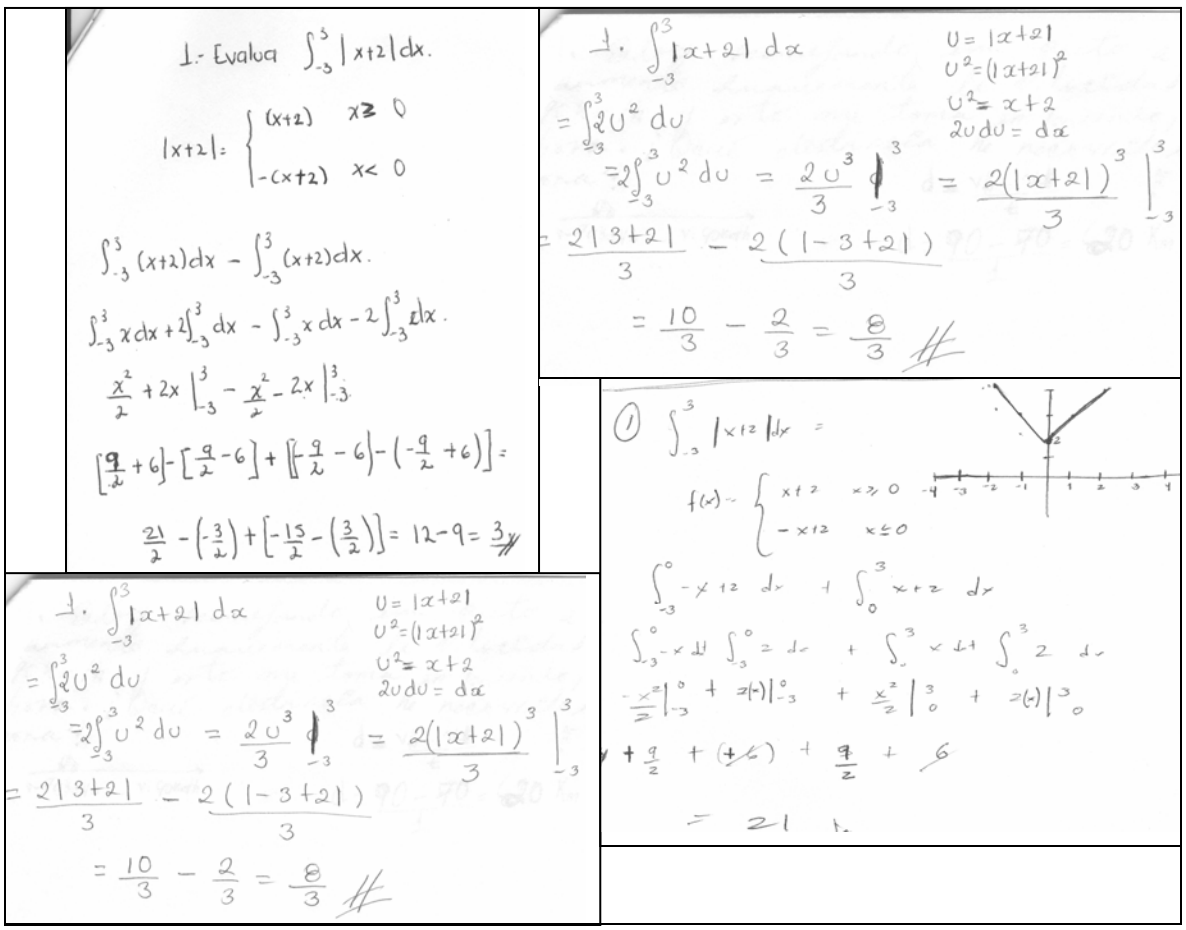
Sobre las dificultades en estudiantes

A continuación se mostrará mediante ejemplos, el tipo de dificultades y errores más comunes que presentaron estudiantes de las 6 licenciaturas al momento de resolver un cuestionario sobre ejercicios básicos de límite, derivada, integral y sucesiones. Citamos el caso en donde se les pide a 99 estudiantes:

Evaluar $\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx$

El ejercicio fue tomado del cuestionario utilizado por Eisenberg y Dreyfus (1966) en su trabajo de investigación sobre la resistencia que presentan graduados de cálculo para visualizar en matemáticas.

Los datos que obtuvimos quedaron de la manera siguiente: De los 99 estudiantes cuestionados, sólo 14 dieron una respuesta correcta, 81 dieron una respuesta incorrecta y 4 estudiantes omitieron su respuesta. El escenario privilegiado fue el algebraico-analítico caracterizado por ser aquel en donde los estudiantes emplean recursos basados en una manipulación algebraica y métodos analíticos de resolución. El tipo de errores encontrados fueron clasificados en cuatro aspectos: aquellos errores asociados a los límites de integración, asociados al desarrollo de procesos algebraicos, al dominio gráfico y los asociados al dominio conceptual. Un dato adicional es que hoy estudiantes de ciencias exactas siguen mostrando una fuerte resistencia a visualizar en matemáticas, pues en efecto, de los 14 estudiantes que dieron una respuesta correcta al ejercicio planteado, únicamente 6 de ellos recurrieron a una estrategia de tipo visual. Véase el siguiente cuadro 1 en donde se muestra los errores y el tipo de procedimiento de resolución seguido por la mayoría de los estudiantes.



Cuadro 1. Procedimientos de resolución para el ejercicio 1

Los resultados obtenidos en los estudios de corte etnográfico desarrollados por García (2006a) y García (2006b) en las aulas de cálculo en la misma facultad y como parte de las actividades del proyecto, muestran que la manera en que los estudiantes tienden a plantear y resolver una actividad matemática escolar, no es ajena a la manera en como los contenidos matemáticos son desarrollados en el salón de clases. Por ejemplo, se detectó que los profesores poco recurren a recursos visuales y al desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes, que a juzgar por las evidencias reportadas en la literatura, resultan necesarios para lograr un mejor entendimiento y dominio del cálculo. La enseñanza de aula se caracteriza por una marcada tendencia en el uso estrategias expositivas-discursivas centradas en el profesor como responsable del contrato didáctico.

Sobre el profesorado y el currículo

Sin duda, con el paso del tiempo, cada dependencia educativa va gestando su propia "filosofía", sobre la educación y la forma de llevarla a cabo. Finalmente, es ésta filosofía y las creencias e ideas compartidas del profesorado (entorno a la matemática) que terminan rigiendo la práctica educativa institucional. En efecto, cuándo se les pidió a profesores que expresaran dos razones por las cuáles considera se estudia cálculo en las 6 diferentes licenciaturas de la facultad, sus respuestas fueron del tipo: *...es una herramienta para desarrollar aplicaciones en…,provee una formación básica para desarrollar el pensamiento lógico y científico…,es una herramienta básica de las matemáticas, proporciona un lenguaje para interpretar situaciones y técnicas para analizarlas…,es una asignatura básica…, conceptualiza ideas importantes del ingenio humano…*

Es claro que el profesorado posee ciertas creencias y concepciones sobre el cálculo y de su presencia en el currículo matemático. Por ejemplo, nótese cómo ellos refieren al cálculo como una herramienta básica, importante para cualquier licenciatura, sin embargo, desconocen en cierta forma, las aplicaciones propias para cada una de ellas. Asimismo, se observa que le atribuyen al cálculo una cualidad formativa, por ejemplo, enseña a pensar, desarrolla el pensamiento lógico. Tal cualidad ¿es exclusiva del cálculo? ¿tal cualidad resulta ser la más importante o central del cálculo y de su papel en el currículo matemático?

Discusión

El estudio del funcionamiento del sistema didáctico al interior de las dependencias educativas, ha de considerársele como un punto de partida para los cambios deseados en la educación matemática y los problemas de reprobación y rezago intrínsecos a la misma. La práctica matemática del alumno entendida como un proceso que exige habilidades para el manejo de estructuras teóricas para la resolución de problemas que soslaya lo conceptual estructural, aspecto fuertemente difundido en el tipo de libros empleados en la facultad y en la práctica del profesor en el aula, requieren ser atendidas mediante formas alternativas de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, elaboración de materiales didácticos que atiendan la parte conceptual y herramental del cálculo y cursos de capacitación didáctica entre los profesores, con el propósito de cambiar su tipo de pensamiento.

Conclusión

A juzgar por los resultados, en la facultad se desarrolla una enseñanza que tiene marcados énfasis en la parte analítica-formal sobre el uso y manejo de los conceptos dejando débil aspectos conceptuales e instrumentales (recurso visual, analogías, entre otros). Poco o nada se privilegia la generación de espacios para la experimentación matemática ("vivencia matemática" por parte de los estudiantes).

Es cuestionable el hecho de que los 99 estudiantes de ciencias "exactas" entrevistados en una parte del proyecto sobre sus habilidades en temas de cálculo, dejen a un lado lo supuestamente aprendido y dominado en sus cursos *formales* de cálculo. En el ejemplo mostrado sobre las dificultades que presentaron los estudiantes, se puede mirar que el desarrollo de los cursos de cálculo con excesivo formalismo o rigor matemático no garantiza un entendimiento conceptual ni un dominio operacional por parte de los estudiantes. Al respecto, algunas explicaciones que brindan los profesores sobre el fracaso de los estudiantes, tienen que ver más con aspectos que le competen al estudiante que a una responsabilidad compartida.

Así, se dirá que los estudiantes, en efecto, logran cierto grado de conocimiento sobre los temas o conceptos básicos del cálculo empero queda al descubierto una fragilidad en la parte del *saber* que hacer con eso que conocen.

Reconocimiento

Se agradece y reconoce el apoyo brindado por el proyecto de Fondos Mixtos CONACYT-Gobierno del Estado de Yucatán "Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: El caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán" Clave YUC-2004-C03-033.

Bibliografía

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México, D.F., México: Editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 7*(2): 33 – 115
- Brousseau, G. (1997). Theory Of Didactical Situations In Mathematics. Boston, London: Kluwer Academia Publlishers. Editado y trasladado por Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamun Sutherland y Virginia Arfield.
- Chevallard, Y. (1998). *La Transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* (Gilman, C. Trads.) Argentina: Aique. (Trabajo original publicado en 1991).
- Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali, Colombia. Universidad del Valle Instituto de Educación Matemática.
- Eisenberg, T., Dreyfus, T. (1966). On Visual Versus Analytical Thinking in Mathematics. *Procedings PME-10* Congress*,* London, 153-158.
- García, E. (2006a). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago de cálculo.* Tesis de Licenciatura, Mérida, Yucatán.
- García, E. (2006b). *Una caracterización de la cultura didáctica al interior del aula de cálculo. Factor reflexivo del quehacer docente en los estilos de aprendizaje.* Tesis de Licenciatura, Mérida, Yucatán.
- Hoffman, J., Johnson, C., Logg, A. (2004). *Dreams of Calculus. Perspectives on Mathematics Education*. Berlin, Germany: Springer.
- Martínez, F. (2002). Estudio de la eficiencia en cohortes aparentes. En [Libros en línea] ANUIES, *Deserción, Rezago y Eficiencia Terminal en las IES: Propuesta metodológica para su estudio*

- Montero-Sieburth, M. (1993). Corrientes, enfoques e influencias de la investigación cualitativa para Latinoamérica. Colección La Educación, 3(116), 1-27.
- Reséndiz, E. (2003). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México.
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. México. Trillas. Brousseau, G. (1986).Versión original en francés (1985).

PERCEPCIÓN DE LA NOCIÓN DE CONSERVACIÓN DEL ÁREA ENTRE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Ma. Guadalupe Cabañas, Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN, México
gcabanas@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx
Reporte de investigación

Resumen

Presentamos los resultados de una exploración realizada con estudiantes universitarios respecto de su percepción sobre la noción de conservación del área en actividades que precisan del empleo de representaciones gráficas o analíticas vinculadas a regiones planas. La noción de conservación se percibió entre algunos estudiantes en el uso de los modelos dinámico, de congruencia, de paralelismo, gráfico y analítico principalmente, en el proceso de solución de las actividades. Los antecedentes del estudio se ubican en los resultados de investigaciones realizadas por Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A., (1970), Kordaky, Potari (2002), Kordaki, (2003), y; Freundenthal (1983).

Palabras clave: Medición, comparación y conservación del área, modelos dinámico, de congruencia, de paralelismo, gráfico y analítico.

Introducción

El área en particular es una noción arraigada a la cultura de las sociedades, a la ciencia y a la tecnología, así como a las vicisitudes de la vida diaria de las personas. Las situaciones en las que se presenta son prácticamente ilimitadas: en la elaboración de planos y mapas, la cantidad de tela a comprar, la superficie de terreno a construir, el territorio que ocupa un municipio, etc. (Cabañas, 2005; Cabañas y Cantoral, 2005). El concepto de área se vincula al de cuantificación de una superficie a la que se asocia una unidad de medida y que se expresa como unidad cuadrada. El concepto de medida de área consta del concepto de unidad, el concepto de iteración de unidad, la cantidad de unidades y el cálculo de fórmulas (Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. 1970, Kordaki y Potari, 2002). La medición del área involucra tanto a la comparación como a la conservación. La comparación es una actividad que permite establecer una relación de orden entre dos o más objetos respecto a cierta magnitud o cualidad, para determinar cuál es mayor o menor con respecto de sus áreas. En términos generales la palabra conservar significa *mantener el estatus* de algo, *cuidar* o *guardar* algo, dependiendo del contexto en que se use. Así, podemos encontrar que se ha usado y se sigue utilizando en los contextos cultural, social, científico y escolar. En el contexto escolar, a la conservación se le identifica como una práctica común vinculada a las actividades propias de la enseñanza. En la construcción del conocimiento matemático por ejemplo ha sido reconocida como fundamental, a partir de los estudios realizados por Piaget y colaboradores (1970), quienes señalan que la conservación del área antecede a su medida. Conservar el área significa que aun después de realizar determinadas transformaciones, ya sea sobre una representación analítica o geométrica, el valor de su área permanecerá sin cambios. Es posible por ejemplo conservar el área de una figura plana a partir del cambio de su posición sin llegar a modificar su forma, al realizar movimientos de rotación, traslación y reflexión. También puede presentarse la conservación del área al seccionar partes y reacomodarlas (aquí la figura cambia de forma). En el estudio que se reporta, centramos nuestra atención en la conservación del área vinculada a regiones planas.

Antecentedes del Estudio

Los antecedentes toman como base los estudios realizados por Piaget y colaboradores en los años 60's y el estudio fenomenológico presentado por Freudenthal (1983) sobre el área. Piaget y sus colaboradores llevaron a cabo estudios sobre el desarrollo del pensamiento del niño y con la comprensión de conceptos relacionados al área. Su contribución al estudio del área ha sido importante, ya que identificaron el tipo de nociones que destacan en niños de 8 a 11 años de edad cuando tratan con las nociones de conservación y medición de áreas. A partir de estudios de este tipo en que se emplean materiales concretos, se afirma que el concepto de conservación de área es un aspecto preliminar y fundamental en el entendimiento del concepto de medición de área, es decir, que la conservación antecede a la medición. Esta tesis fue continuada en Grecia con estudiantes de secundaria (14 años de edad) por Kordaki, M. & Potari, D. (2002) y Kordaki (2003) quienes utilizan un micromundo llamado C.AR.M.E. (Conservación de Área y su Medida) para que los estudiantes construyan de forma dinámica sus propias aproximaciones a los conceptos de conservación y medida de área. Mediante el uso de este ambiente exploraron las estrategias de los estudiantes en relación al concepto de conservación de área y su desarrollo mientras interactuaban con el micromundo; el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto de conservación de área en triángulos equivalentes y paralelogramos de base común e igual altura, y; el papel de las herramientas ofrecidas por el micromundo en relación con las estrategias de los estudiantes. A través de los resultados de su investigación muestran que:

- Los estudiantes expresaron su conocimiento intuitivo a través de sus estrategias de solución;
- Se permitió un pensamiento reversible sobre conservación y medición;
- Pueden dar significado al concepto de medición al usar la herramienta para medir, y;
- Que las herramientas proporcionadas por el ambiente experimental estimularon a los estudiantes a expresar sus propias aproximaciones al concepto de conservación de área.

En el estudio fenomenológico sobre el área presentado por Freudenthal (1983) se afirma que son tres las formas más importantes de aproximarse al área:

- *Repartir equitativamente*. Aprovechando regularidades, por estimación y por medida.
- *Comparar* y *reproducir*. Por inclusión, mediante transformaciones de romper y rehacer, por estimación, por medida y por medio de funciones.
- *Midiendo*. Por exhausción con unidades, por acotación entre un valor superior e inferior, por transformaciones de romper y rehacer, por medio de relaciones geométricas generales, por medio de fórmulas generales, por medio de principios como los de Cavalieri y por medio de mapeos.

Freudenthal considera que todas estas aproximaciones son didácticamente aceptables, aunque con diferente peso.

La noción de conservación del área en estudiantes universitarios

Los resultados reportados en Piaget, J. *et al.* (1970), Kordaky, Potari (2002), Kordaki, (2003), y; Freundenthal (1983) con relación al estudio del área, fueron usados en la exploración que realizamos con estudiantes del tercer semestre de una licenciatura en Matemáticas (19 - 21 años de edad) y del que damos cuenta en este documento. El diseño de las actividades utilizadas en el estudio descansó en el empleo de la conservación del área a diferentes niveles, así como de conceptos asociados como medición, comparación y conservación. El estudio se realizó durante las actividades académicas de un seminario de Análisis Matemático en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Participaron dieciocho estudiantes, quienes habían concluido recientemente los cursos de Geometría plana y Cálculo Diferencial e Integral; antecedentes académicos que consideramos necesarios para el desarrollo de las actividades diseñadas en la secuencia en que intervendrían.

La secuencia

La secuencia estuvo constituida por diez actividades organizadas en tres series. En la primera serie se situó a los estudiantes a trabajar con polígonos convexos y no convexos; en la segunda, con funciones lineales y no lineales, y; en la tercera, con integrales (ver anexo). La primera serie constó de tres actividades y comprendieron: la determinación de relaciones entre áreas de triángulos con misma base y misma altura; la transformación de polígonos convexos y no convexos conservando áreas, y; la determinación de las condiciones que deben establecerse para la igualdad de áreas entre polígonos convexos. La segunda serie constó de cuatro actividades y consideró: la determinación de áreas bajo la curva, tomando como referencia un área previamente conocida; la transformación de gráficas de funciones lineales a no lineales conservando el área bajo la gráfica, y; la construcción de gráficas de funciones definidas en un intervalo dado, cuya área debía de ser conservada. La tercera serie constó de tres actividades que comprendieron: el cálculo y representación de áreas vía la integración y la determinación de parámetros en las expresiones algebraicas de funciones constantes, lineales y cuadráticas, con la condición de garantizar la conservación del área, representando además geométricamente sus resultados.

Resultados experimentales del estudio

El análisis de los resultados se hizo atendiendo a una caracterización de modelos que propusimos en función de las producciones de los estudiantes durante el proceso de solución de las actividades, ya sea para justificar o argumentar una respuesta; al construir representaciones de acuerdo a las condiciones dadas en una determinada situación, o; bien al determinar el área según fuera el caso. Los estudiantes que no mostraran evidencias de involucrarse con la actividad, serían ubicados en la categoría: “no resuelve”.

a) Modelos caracterizados en el proceso de solución de las actividades de la serie I y nociones asociadas

En esta actividad dieciséis estudiantes la resolvieron y dos no mostraron evidencias de haber trabajado en ella. De los estudiantes que resuelven observamos que en el proceso de solución sus argumentos estuvieron centrados en identificar relaciones en los tres triángulos situados entre las rectas paralelas. Observamos que algunos estudiantes identificaron que los triángulos: tienen áreas iguales, son semejantes o bien que sus áreas se conservan. Los modelos caracterizados en este proceso fueron: de congruencia, algorítmico, dinámico y de semejanza (ver tabla 1). Los que usaron el modelo caracterizado como dinámico indicaron que el área de los triángulos se conserva, en su argumento señalaron que el punto opuesto a la base de los triángulos (vértice) puede moverse sobre la recta en que está ubicado. Los que se apoyaron en el modelo algorítmico (aludieron a la fórmula para el cálculo del área del triángulo) indicaron que los tres triángulos tiene misma base y altura y deducen que sus áreas son iguales (*imagen a*). Los estudiantes que usaron el modelo de congruencia o bien el de semejanza centraron sus argumentos en las relaciones entre lados y ángulos. Los argumentos estuvieron centrados en la igualdad entre pares de lados y ángulos en los triángulos por estar situados entre rectas paralelas. Identificamos además, que los estudiantes que hacen explícita la idea de conservación, son quienes usaron el modelo dinámico y que manifestaron en las justificaciones a sus respuestas. Aquellos estudiantes que basaron sus argumentos en los modelos algorítmico, de congruencia y de semejanza percibieron a la conservación al apoyarse en la fórmula para calcular el área del triángulo o bien en las relaciones entre lados y ángulos de los triángulos ubicados entre paralelas (en otros casos, los polígonos debían estar dispuestos entre rectas paralelas).

Modelos identificados	**No. de estudiantes que lo usaron**	**%**
Modelo de congruencia	6	33
Modelo algorítmico	6	33
Modelo dinámico	2	11
Modelo de semejanza	2	11
No resuelven	2	11
Total	18	100

Tabla 1. Frecuencia de los modelos caracterizados en la actividad 1, Serie I

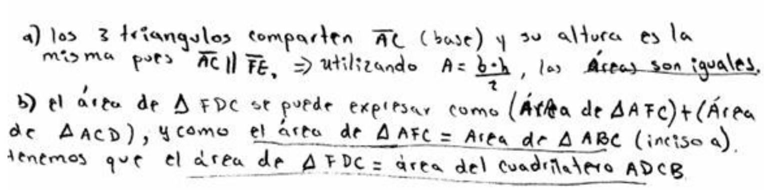

a) los 3 triángulos comparten $\overline{AC}$ (base) y su altura es la misma pues $\overline{AC} \parallel \overline{FE}$. $\Rightarrow$ utilizando $A = \frac{b \cdot h}{2}$, las áreas son iguales.
b) el área de Δ FDC se puede expresar como (Área de ΔAFC)+(Área de ΔACD), y como el área de Δ AFC = Area de Δ ABC (inciso a), tenemos que el área de Δ FDC = área del cuadrilatero ADCB

Imagen a. El argumento del estudiante está basado en un modelo algorítmico (fórmula del área del triángulo)

En la actividad dos, observamos que ocho estudiantes realizaron la transformación que se les pidió en al menos una de las figuras que constituyen la actividad y diez no mostraron evidencias de haber trabajado con ella. Se caracterizaron dos tipos de modelos: de paralelismo y dinámico (ver tabla 2). En los estudiantes que realizaron las transformaciones que se les pidió, observamos que cinco se apoyaron en la relación de paralelismo, al construir una nueva figura reduciendo el número vértices del polígono inicial sin alterar su área. El procedimiento consistió en construir triángulos entre rectas paralelas tomando como referencia otro triángulo dispuesto en la figura (ver *imagen b*). Tres estudiantes simularon las acciones de cortar y pegar. El procedimiento consistió en simular que cortaron partes del polígono a transformar y las pegaron en otro lado del mismo polígono. En esta actividad la noción de conservación del área está implícita e identificamos que fue percibida por los estudiantes al momento de realizar las construcciones.

Modelos identificados	**Estudiantes que lo usaron**	**%**
Modelo de paralelismo	5	28
Modelo dinámico	3	17
No resuelven	10	55
Total	18	100

Tabla 2. Frecuencia de los modelos caracterizados en la actividad 2, Serie I

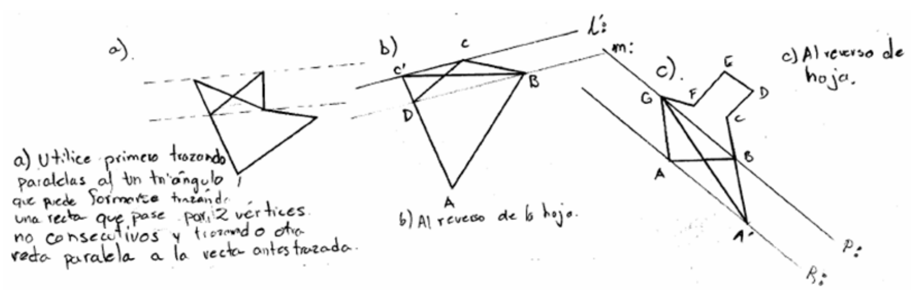


Imagen a. El argumento del estudiante está basado en un modelo algorítmico (fórmula del área del triángulo)

En la actividad tres de la serie uno encontramos evidencias de que fue resuelta por ocho estudiantes y diez no lo hicieron. Se caracterizaron dos tipos de modelos: de paralelismo y congruencia (ver tabla 3). A los estudiantes se les situó para que indicaran las condiciones que deben cumplir los polígonos dados, de tal forma que sus áreas fuesen iguales. Los que usaron el modelo de paralelismo, centraron su atención en los lados de las figuras. Argumentaron que las áreas serían iguales si algunos de los segmentos de rectas sobre los que están situadas las figuras, son paralelas. Los estudiantes que usaron el modelo caracterizado como de congruencia argumentaron que las áreas serían iguales si los triángulos que están en la figura son congruentes o bien si al seccionar en triángulos a la figura dada, éstos son congruentes. La noción que se asocia a los modelos caracterizados a partir de sus producciones es la de medida del área. La noción de conservación del área estaba implícita en las condiciones de la actividad.

Modelos identificados	**Estudiantes que lo usaron**	**%**
Modelo de paralelismo	4	22
Modelo de congruencia	4	22
No resuelven	10	56
Total	18	100

Tabla 3. Frecuencia del uso de cada tipo de modelo identificado en la actividad 2, Serie I

b) odelos caracterizados en el proceso de solución de las actividades de la serie II y nociones asociadas

En esta serie la actividad estuvo constituida por diez situaciones. Se pidió a los estudiantes determinar el área sombreada en representaciones gráficas de curvas, a partir de una curva conocida, así como la medida del área bajo dicha curva. Se identificaron dos tipos de modelos: dinámico, algorítmico y su combinación. En el proceso de solución, los estudiantes tomaron como referencia la información inicial de la actividad, en la determinación del área sombreada de las expresiones gráficas objeto de estudio. Quienes usaron el modelo caracterizado como dinámico, argumentaron que "movieron" algunas partes de la figura para obtener un área conocida, ya sea la que se les presentó al inicio de la actividad o bien otra, determinada en una actividad previa. En otros casos se hizo evidente en la propia actividad, ya que "movieron" partes de las regiones sombreadas (rotaron, reflejaron o trasladaron partes) en las representaciones gráficas. El modelo algorítmico se caracterizó a partir de las operaciones aritméticas que realizaron apoyándose en el trabajo con fracciones (ver *imagen c*). Las nociones ligadas al proceso de solución en esta actividad son la comparación, conservación y medición del área. La comparación se presentó cuando los estudiantes perciben que algunas partes son iguales a un área conocida, ya sea de la curva dada, cuya área bajo la gráfica era conocida por la actividad previa, o bien determinada en alguna etapa de la actividad. Identificamos que la conservación se percibió al momento de "mover" algunas de las partes sombreadas cuya área les era conocida. La medición se identifica a partir de los cálculos realizados.

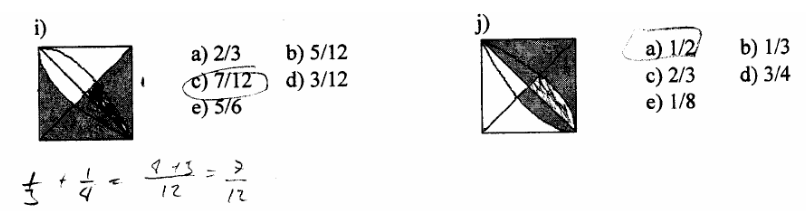


Imagen c. En el proceso de solución el alumno realiza "movimientos" (modelo dinámico) para obtener el área conocida y realiza operaciones (modelo algorítmico).

La actividad dos se vincula con la uno, ya que se representó a la misma curva de referencia. A los estudiantes no se les indicó ni por escrito ni verbalmente de este vínculo, no obstante la relacionaron al momento de resolverla. Los modelos caracterizados fueron el algorítmico y analítico. Nos referimos al modelo algorítmico cuando los estudiantes se apoyan en las operaciones aritméticas (*imagen d*) y al modelo analítico cuando se apoyan en las integrales (*imagen e*) para determinar el área bajo la región sombreada. En algunos casos los estudiantes hicieron explícita la medida del área de la curva de referencia, ya sea sobre la representación gráfica dada o en los procedimientos algorítmicos que usan. En otros casos, lo hicieron evidente mediante los procedimientos realizados al determinar el área de las regiones sombreadas.

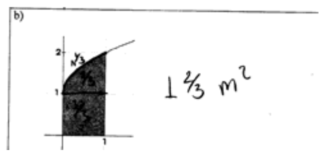


Imagen d

Los alumnos tomaron como referencia la medida del área de la curva conocida

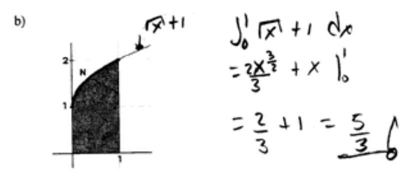


Imagen e

La solución está basada en el uso de integrales (Modelo analítico)

Las nociones asociadas al proceso de solución de esta actividad son: la comparación y la medición del área. La comparación la identificamos cuando los estudiantes contrastan el área bajo la curva y su medida de la actividad uno en esta misma serie con las áreas de algunas partes de las regiones sombreadas en la actividad objeto de estudio. La medición se identifica en los cálculos realizados, basados en los modelos analíticos o algorítmicos.

En la actividad tres se caracterizó al modelo gráfico. Se debió principalmente a que la exigencia era precisamente la de construir gráficas. En la producción de siete estudiantes se perciben ideas de conservación del área al realizar la transformación que se les pide. Once estudiantes no resolvieron la actividad.

En la actividad cuatro se caracterizaron dos tipos de modelos, el analítico y el gráfico, que aparecieron en las producciones de los ocho estudiantes que resolvieron la actividad, el resto no lo hizo. El modelo analítico estuvo basado en el uso de integrales y el gráfico en curvas. Las representaciones tanto gráficas como analíticas de los estudiantes en esta actividad estuvieron basadas en funciones de grado mayor o igual a uno. Las nociones que aparecieron fueron la comparación, conservación y medición del área. La medición, se identificó al momento que los estudiantes determinan una expresión analítica que cumpla con las exigencias de la situación. La comparación se identifica cuando relacionan el área de referencia con la que determinan, a partir de la expresión analítica, la conservación se identifica al momento que comparan el área determinada con la de referencia.

c) Modelos caracterizados en el proceso de solución de las actividades de la serie III y nociones asociadas

En la actividad uno de la serie tres se caracterizaron dos tipos de modelos: el gráfico y el analítico (*imagen f*). Las nociones involucradas en esta actividad son las de comparación, conservación y medida del área a través del uso de integrales. La frecuencia con que aparecieron los modelos caracterizados se muestra en la tabla 4.

Modelos identificados	**Estudiantes que lo usaron**	**%**

Modelo analítico	6	33
Modelo gráfico	11	61
No resuelven	1	6
Total	18	100

Tabla 4. Frecuencia del uso de cada tipo de modelos caracterizados en la actividad 1, Serie III

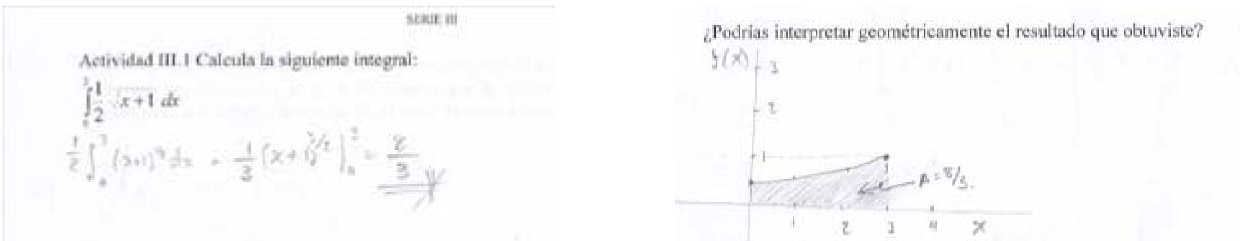


Imagen f. Uso de los modelos gráfico y analítico

Los modelos caracterizados en la actividad dos de esta serie fueron el analítico y el gráfico (ver tabla 5). En la producción de doce estudiantes se muestran evidencias del uso de estos modelos, seis no resolvieron la actividad. En la imagen adjunta (*g*) se muestra la producción de un estudiante que utilizó los modelos analítico y gráfico caracterizados en esta actividad

Modelos identificados	No. de estudiantes que lo usaron	%
Modelos analítico y gráfico	12	67
No resuelven	6	33
Total	18	100

Tabla 5. Frecuencia del uso de cada tipo de modelo caracterizado en la actividad 2, Serie III

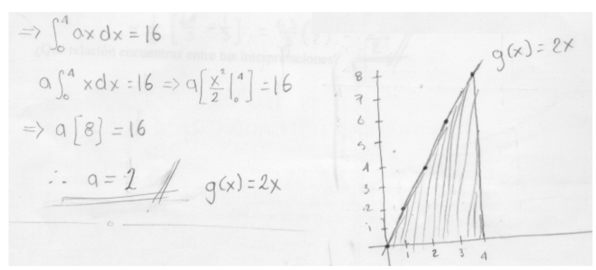


Imagen g. Uso de los modelos gráfico y analítico

El modelo analítico se relacionó al uso de integrales para determinar el valor del parámetro de referencia y el modelo gráfico a la representación del área bajo la gráfica.

En la actividad tres también aparecieron los modelos analítico y gráfico (ver tabla 6). El analítico caracterizado se ligó al uso de integrales y el gráfico a la representación del área a determinar.

Modelos identificados	**No. Estudiantes que lo usaron**	**%**
Modelo analítico	6	33
Modelos analítico y gráfico	9	50
No resuelven	3	17
Total	18	100

Tabla 6. Frecuencia del uso de cada tipo de modelo identificado en la actividad 3, Serie III

A manera de conclusión

En el desarrollo de las actividades que comprendieron el estudio exploratorio, los estudiantes mostraron una gran variedad de procedimientos al resolverlas. Se caracterizaron siete tipos de modelos: algorítmico, de congruencia, de semejanza, de paralelismo, dinámico, gráfico y analítico (y su combinación). Se observó que la naturaleza de las actividades contribuyó a que en algunos momentos se presentaran determinados tipos de modelos en el proceso de solución por parte de los estudiantes. Así, encontramos que:

- En las actividades de la *Serie I* en las que se pidió a los estudiantes el trabajar sobre polígonos convexos y no convexos, aparecieron modelos ligados a relaciones cualitativas en los polígonos involucrados. Los modelos que aparecieron con más frecuencia en el proceso de solución de esta actividad fueron el de congruencia y el de paralelismo.

- En las actividades de la *Serie II* en las que se propuso a los estudiantes trabajar sobre construcciones vinculadas a funciones lineales y no lineales, los modelos que aparecieron con más frecuencia en el proceso de solución tienen que ver con representaciones gráficas y analíticas principalmente.

- En las actividades de la *Serie III* en las que se situó a los estudiantes a: calcular y representar áreas vía la integración, así como la determinación de parámetros en las expresiones algebraicas de funciones constantes, lineales y cuadráticas, con la condición de garantizar la conservación del área, aparecieron modelos ligados a las representaciones gráficas y analíticas principalmente.

La noción de conservación se percibió entre algunos estudiantes en el uso de los modelos dinámico, de congruencia, de paralelismo, gráfico y analítico principalmente. En el uso del modelo dinámico fue más evidente, ya que quienes lo usaron lo expresaron en los siguientes términos: el área se conserva. En el uso de los otros modelos se percibió al nivel del uso de la fórmula para calcular el área de un triángulo o en las relaciones entre lados y ángulos para determinar igualdad en polígonos.

Referencias bibliográficas

Cabañas, G. (2005). La noción de conservación en el estudio del área. En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 19*, 727-732. México: Clame.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005). Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Uruguay: Clame, p. 60.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Holland: D. Riedel Publishing Company.

Kordaki, M., Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(1),* 65 - 100.

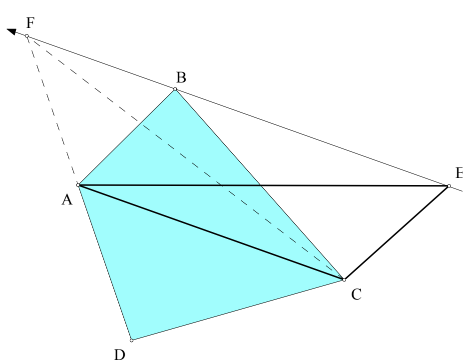
Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on student´s strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematical, 52(2),* 177 - 209.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1970). The child´s conception of geometry. New York; U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.

Anexo

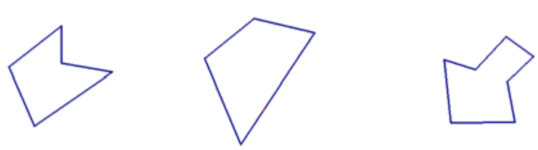
SERIE I

Actividad I.1. En la siguiente figura las rectas AC y FE son paralelas.

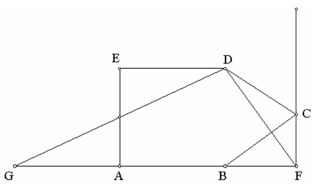


a) Determina la relación que existe entre las áreas de los triángulos ACF, ACB y ACE. Justifica tu respuesta.
b) Determina la relación que existe entre las áreas del cuadrilátero ADCB y el triángulo FDC. Justifica tu respuesta.

Actividad I.2. Transforma los siguientes polígonos en otro con forma diferente, pero con área igual a los dados. Explica en cada caso, el método que utilizaste.



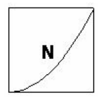
Actividad I.3. En la siguiente figura, se tienen los polígonos ABCDE y GFD.



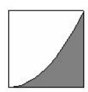
¿Cuáles son las condiciones necesarias para que las áreas de estos polígonos sean iguales?

SERIE II

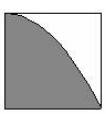
Actividad II.1. En el siguiente cuadrado de área unitaria, se ha graficado una curva N.



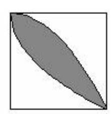
El área bajo la curva de N, es 1/3.



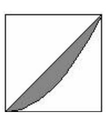
En los siguientes cuadrados de área unitaria, aparece la curva N rotada o reflejada. Señala el valor que consideras corresponde al área de la región sombreada.

a) 

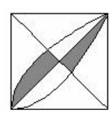
a) 2/3 b) 1/3
c) 2/9 d) 3/4
e) 1/6

b) 

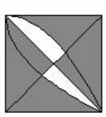
a) 2/3 b) 1/3
c) 2/9 d) 3/4
e) 1/6

c) 

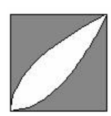
a) 1/12 b) 2/3
c) 1/3 d) 1/6
e) 1/4

d) 

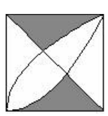
a) 2/3 b) 1/3
c) 2/9 d) 3/4
e) 1/6

e) 

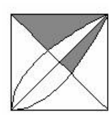
a) 3/4 b) 7/12
c) 2/3 d) 11/12
e) 5/6

f) 

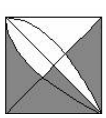
a) 2/3 b) 1/3
c) 2/9 d) 3/4
e) 1/6

g) 

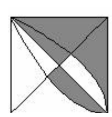
a) 1/12 b) 2/3
c) 1/3 d) 1/6
e) 1/4

h) 

a) 1/6 b) 1/8
c) 1/3 d) 1/2
e) 1/4

i) 

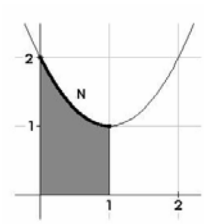
a) 2/3 b) 5/12
c) 7/12 d) 3/12
e) 5/6

j) 

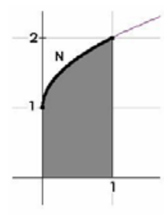
a) 1/2 b) 1/3
c) 2/3 d) 3/4
e) 1/8

Actividad II.2. Las siguientes gráficas contienen a la curva N. ¿Cuál es el valor del área sombreada?

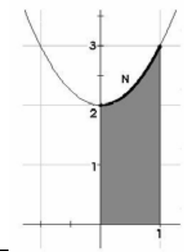
a)



b)

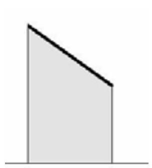


c)



Actividad II.3. A partir de las siguientes figuras, bosqueja la gráfica de una función no lineal cuya área bajo la curva sea igual a la sombreada.

a)



b)

Actividad II.4. Una función *f* está definida en el intervalo [0, 1], el área bajo la curva en dicho intervalo es 1/5. Grafica cuatro funciones diferentes cuyo dominio sea igual al de *f* y el área bajo la curva en dicho intervalo sea también 1/5.

SERIE III

Actividad III.1 Calcula la siguiente integral:

$$\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{x+1}\; dx$$

¿Podrías interpretar geométricamente el resultado que obtuviste?

Ahora, si en lugar de la variable *x* consideramos otra variable, por ejemplo:

$$\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{r+1}\; dr$$

¿Habría modificaciones en tu interpretación geométrica? Justifica tu respuesta.

Actividad III.2 Considera las siguientes expresiones $f(x)=4$, $g(x)=ax$, $h(x)=bx^2$. Encuentra los valores de *a* y *b* de manera que la región formada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo [0, 4] tenga la misma área. Bosqueja geométricamente.

Actividad III.3 Interpreta geométricamente los resultados de las siguientes expresiones:

1. $\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{x+1}\,dx$ 2. $\int_1^2 m^2 dm$ 3. $\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{n}\,dn$

¿Qué relación encuentras entre tus interpretaciones?

UNA PROPUESTA DE CAPACITACIÓN DIDÁCTICA PARA PROFESORES DE CÁLCULO EN EL NIVEL SUPERIOR

Luis Cabrera, Eddie Aparicio
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán
luisaocabrera@yahoo.com.mx, alanda@tunku.uady.mx
Reporte de investigación

Resumen

En la actualidad, existen diversos esfuerzos por proporcionar al profesor universitario una adecuada preparación para actualizar y mejorar su desempeño profesional. Se reconoce la necesidad de que el profesorado posea una adecuada y profunda competencia didáctica, en un nivel similar al exigido en lo que respecta a su formación disciplinar. Sobre todo si tenemos en cuenta que la práctica docente está vinculada con la aparición de factores que inciden en el desempeño escolar de los alumnos. Estas prácticas son desarrolladas con base en las creencias de los profesores sobre lo que es la enseñanza y el aprendizaje, las cuales son forjadas a través de su experiencia docente y escolar.

Por ello presentamos un trabajo que consistió en desarrollar una propuesta de un curso-taller de capacitación didáctica en el área de cálculo para profesores universitarios. Esta propuesta fue manejada en una fase de experimentación, buscando determinar el grado de aceptación y el tipo de actitud de los profesores participantes hacia este tipo de cursos-talleres. Los resultados de esta propuesta consideramos que constituirán una adecuada base para la elaboración de cursos de formación didáctica dirigidos a un mayor número de profesores universitarios en el área de ciencias exactas.

PALABRAS CLAVES: creencias, formación didáctica, profesor universitario, práctica docente.

Introducción

Es innegable la existencia de problemas en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, y en general en toda la matemática. Por ejemplo, problemas que derivan de la complejidad inherente de los propios conceptos, los cuales han tenido que evolucionar hasta alcanzar el rigor formal con el que actualmente se presentan y se tratan en el currículo; ocultándose en esta evolución, ideas fundamentales que dieron origen a tales conceptos. Si a esto agregamos las problemáticas provenientes de la forma en que se desarrolla su enseñanza, entonces, los problemas para el aprendizaje del cálculo se tornan aun mucho más complejos.

Si bien, se ha mencionado hasta el cansancio que no basta con dominar una disciplina para llevar a cabo una adecuada enseñanza de ella, esto parece únicamente repercutir en los niveles básicos de educación. En dichos niveles la formación en el ámbito psicopedagógico y didáctico es aceptada como necesaria, justificándose dicha necesidad debido al nivel de madurez en el que se encuentran los estudiantes. Mientras que en el nivel superior, la idea de la suficiencia del conocimiento disciplinar es ampliamente aceptada, alegando que los alumnos se encuentran en un nivel de madurez tal que aún sin profesores ellos mismos están en condiciones de lograr aprendizajes (Campanario, 2003). Este alegato, si bien posee argumentos a favor que provienen de la formación que se espera dar a los alumnos universitarios, no es posible aceptarlo como una verdad universal y mucho menos valerse de él para justificar la actuación docente en este nivel.

En la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, por cierto, única universidad pública en todo el estado, se reportan altos índices de reprobación y rezago académico, acrecentándose estas problemáticas en los cursos de álgebra y cálculo que se imparten en los primeros semestres de estudio. Esta problemática ha dado pie al desarrollo del proyecto de investigación denominado "Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: el caso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán".

Entre los resultado provenientes de la primera etapa de dicho proyecto, se reportan factores que podrían incidir en la reprobación y el rezago escolar en la asignatura de cálculo, entre los cuales podemos mencionar que el perfil del profesorado se caracteriza por una formación matemática amplia, pero con muy pocos estudios pedagógicos y didácticos (García, 2006a; García, 2006b). Este hecho reflejado ampliamente en el ejercicio docente al interior de las aulas, en donde el profesor se caracteriza por ser la autoridad "didáctica", responsable de guiar el proceso de enseñanza, aprendizaje de los contenidos temáticos y marcado por el uso excesivo de una técnica expositiva, suponemos, favorece una práctica docente vinculada con: el conocimiento disciplinar que posee el profesor; su idea respecto a los enfoques más adecuados para alcanzar los objetivos que persigue la materia dentro del plan de estudios; su concepción sobre la forma en que se enseña y aprende cálculo. Al respecto, Blanco y Barrentes (2003), Azcárate (1998), ambos citados en Parra (2005), señalan que las prácticas docentes que se realizan dentro del salón de clases son el resultado de las creencias de los profesores respecto a la forma en que se debe llevar a cabo la enseñanza y lo que ellos aceptan como muestras de aprendizaje por parte de sus alumnos. Siendo además la fuente de dichas creencias su propia experiencia como estudiante, llevándolo, en muchas ocasiones, a repetir esquemas realizados por sus propios profesores, formándose de esta manera un círculo vicioso difícil de superar.

En esta dirección, podemos afirmar que la práctica docente del profesor está vinculada con la aparición de factores que inciden en el desempeño escolar de los alumnos (D'Amore y Martini, 2000). No obstante, el éxito de cualquier cambio en la forma en que se desarrolla la enseñanza está determinado en gran parte por la implementación de un cambio en las concepciones del profesor, pues muchas de ellas se vuelven verdaderos obstáculos para lograr un cambio en su método de enseñanza (Campanario, 2003). Por tanto, una forma de contribuir a subsanar las problemáticas que se presentan es mediante la capacitación de los profesores en el ámbito de la didáctica disciplinar.

En la actualidad, existen diversos esfuerzos por proporcionar al profesor universitario una adecuada preparación para actualizar y mejorar su desempeño profesional. Se reconoce la necesidad de que el profesorado posea una adecuada y profunda competencia pedagógica, es decir, además de conocer su disciplina, el profesor universitario debe aprender la profesión docente (Vivas, et. al., 2003). Se reporta también que las actividades de los profesores no pueden ser intuitivas, espontáneas, aisladas, tradicionales o centradas en el aula. Su saber profesional debe abarcar conocimientos actualizados de la disciplina que enseña, de la didáctica universitaria y de la didáctica especial correspondiente (Vivas, et al., 2003). Para el caso que nos ocupa, la didáctica de las matemáticas constituye esa disciplina específica correspondiente.

Un aporte de la didáctica de las matemáticas hacia la formación de los profesores lo constituye la idea de postular que cada conocimiento o saber debe poder ser determinado por una situación, en donde las relaciones que conforman a tal situación hagan que ese conocimiento sea necesario para su realización o mantenimiento (Brousseau, 1990). Entonces, bajo esta premisa, los profesores esperan por lo menos, que la didáctica les proporcione lo esencial de las *técnicas específicas de las nociones que hay que enseñar*, que sean compatibles con sus concepciones educativas; *técnicas locales y comunes*, que le proporcionen métodos listos para usar; así como *técnicas especiales* para guiar a alumnos con dificultades especiales. Esta parte técnica de la didáctica es un fundamento de la profesionalización de la actividad del profesor. Sin embargo, poseer un catálogo de técnicas o situaciones de enseñanza no le proporciona capacitación alguna para que la enseñanza se traduzca en aprendizajes por parte de los alumnos, requiere por tanto, una preparación que le permita la creación de verdaderas situaciones de aprendizaje. Se necesita que el profesor se interese por el estudio de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje ligadas al contenido matemático a enseñar, así como también por el estudio de las condiciones de creación, difusión y adquisición provocada de tal contenido. Así, a nuestro entender, éste requiere poseer los conocimientos teóricos derivados de las investigaciones científicas relacionadas con esas temáticas, los cuales forman parte de las situaciones de aprendizaje y le dan sustento. De este modo, el profesor adquirirá elementos que le ayuden al desarrollo de sus clases. No obstante, esos conocimientos demandan el uso de la terminología adecuada para evitar caer en contrasentidos, y nos indican que no basta con los conocimientos y condiciones de que disponen los profesores, como muchos de ellos desean.

Otro punto que los profesores podrían esperar de la didáctica (Brousseau, 1990), es el conocimiento sobre su trabajo, es decir, de la enseñanza: *los comportamientos de los alumnos en las condiciones específicas de enseñanza; las condiciones que hay que crear en las situaciones a proponer y las que hay que mantener en la gestión de la enseñanza; así como los fenómenos didácticos que enfrentan los participantes*. Se tiene que tener presente que la enseñanza directa del saber es imposible, pues en caso contrario deberíamos renunciar a hacerlo funcionar. El uso y la destrucción de los conocimientos precedentes forman parte, por tanto, del aprendizaje, admitiendo en consecuencia durante este proceso la reorganización didáctica del saber, así como una cierta dosis de errores y contrasentidos, tanto por parte del alumno como de la enseñanza. Esto nos permite vislumbrar que el único medio para el profesor de conocer las circunstancias de la creación y difusión de los conocimientos, es haber enseñado la noción a ese alumno, o bien, disponer de un conjunto de referencias, efecto de la tradición o de un conocimiento profesional. Sólo así se puede pensar en situaciones de aprendizaje no vividas. Se requiere que el profesor vea su clase como un lugar de experimentación, en donde puede obtener información pertinente para adecuar y modificar su práctica docente.

Lo expuesto hasta ahora nos muestra la importancia de proporcionarle a los profesores de cálculo, elementos teóricos-metodológicos que permitan incidir en las actuales prácticas docentes, fundamentándolas en conocimientos científicos con el fin de favorecer la incorporación de nuevas perspectivas en lo que a los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo se refiere. A este respecto, la formación de los profesores en didáctica de las matemáticas, se perfila como el medio para lograr tal fin. Sin embargo, no resulta fácil ni inmediato lograr una modificación real de las prácticas de los docentes, más aún si estos profesores no sienten la necesidad de modificar sus prácticas actuales. Se requiere identificar los obstáculos propios de cada grupo de profesores y superarlos de forma constante y paulatina.

Aspectos metodológicos

En este trabajo se realizó una revisión de propuestas de formación de profesores de matemáticas, centrando nuestro interés en las propuestas que estuvieran dirigidas hacia los profesores de cálculo en el nivel superior. Paralelamente, se procedió a revisar la literatura para conocer resultados provenientes de la didáctica de la matemática y en especial, de la didáctica del cálculo que contribuyeran a dar un panorama general de dicha ciencia, a la vez que contribuyera a proporcionar a los profesores elementos que pudieran utilizar durante la planeación, desarrollo y evaluación de sus clases o cursos. Se buscaba hacer conciencia entre los profesores de aspectos que pudieran ya haber observado en sus clases, pues de esta forma esta primera aproximación a la didáctica de las matemáticas tendrían en los profesores una base sobre la cual confrontarse. Pero también se procuró la incorporación de otros elementos importantes para su capacitación y formación.

Posteriormente, se procedió a la conformación de la propuesta experimental denominada "Curso-Taller de formación en didáctica de las matemáticas", la cual tuvo una duración de seis horas, distribuidas en cuatro sesiones de hora y media cada una. Las sesiones se llevaron a cabo una vez por semana. El diseño del curso-taller pretendió introducir a los profesores al ambiente de la didáctica de las matemáticas, centrándonos en lo que a cálculo se refiere, para lo cual se pensó en comunicarle al profesor ciertos aspectos teóricos sobre los cuales generar discusión. En lo que se refiere al aspecto práctico del curso, se enfrentó al profesor con algunas actividades que le permitieran vislumbrar los aportes que dichos conocimientos teóricos tienen, así como alentar aún más la discusión sobre sus acciones didácticas y lo que ellas pueden aportar. Dentro de esta parte, se incluyó la puesta en escena de una actividad didáctica elaborada para tal propósito y la elaboración por parte de los profesores de un diseño didáctico a ser discutido dentro el curso.

La selección de la población de profesores participantes se realizó mediante invitación abierta a los profesores que impartían cálculo en la Facultad de Matemáticas y otros profesores interesados en el tema, y que tuvieran relación con la asignatura de cálculo.

El registro de información se llevó a cabo mediante la grabación en audio de los diálogos y discusiones generadas. Éstas nos permitieron llevar un registro de las posturas que los profesores mostraban ante los saberes que se le presentaba y de los cambios o modificaciones que éstas sufrían, es decir, el impacto que la propuesta estaba teniendo sobre las posturas didácticas y metodológicas de los profesores. Se consideró adecuado emplear un análisis cualitativo, partiendo del supuesto de que toda acción de actualización que se emprenda puede impactar las concepciones que los profesores tengan respecto a la enseñanza y el aprendizaje tanto en el discurso como en la acción. Sin embargo, debido a que los cursos de capacitación y formación impactan sobre el discurso del profesor y que en muchas ocasiones este impacto no tiene el mismo efecto en su práctica cotidiana, los diseños de actividades de aprendizaje que produjesen los mismos profesores, servirán como elementos para analizar la profundidad y solidez de los comentarios expresados.

Resultados y discusión

Uno de los grandes retos a vencer dentro de los cursos de capacitación y formación didáctica o docente de los profesores, lo constituye la idea al respecto de la enseñanza y aprendizaje que estos mismos se han forjado durante toda su vida profesional. Creer que los profesores al asistir a cursos de actualización dejan todas sus experiencias y aceptan como cierto todo lo que se les comunica, es tanto como suponer que los alumnos son mentes en blanco que aceptan todo lo que el profesor les comunica. A propósito de lo referido, véase el siguiente extracto:

Extracto 1, sesión 1.

> …díganme si no es verdad {…}, aprender es un problema doloroso ( ) y eso nadie lo puede evitar, eso creo que debemos quitárnoslo de la mente los que en algún momento vamos a estudiar cálculo, ( ) eso hay que decírselo al estudiante, tienen que entenderlo.

No obstante, durante el desarrollo del curso pudimos constatar que a los profesores esa misma experiencia profesional les ha hecho vislumbrar la necesidad de cambiar sus formas de acción docente. Sin embargo, no poseen elementos que les permitan comenzar dicho cambio, así como darle dirección y sentido.

Extracto 2, sesión 1.

> …una de las cosas que empezamos a hacer hace algún tiempo {…} era que discutíamos, […] el profe venía y decía […] – "tengo un problema" – o – "estoy haciendo esto"-- no llegábamos a cosa muy finas, puntuales muchas veces ¿no?, pero si era importante que en un momento dado entre todos platicarlo […], entonces tu ibas y ya tu te ibas de aquí con otras herramientas {…}. Sin embargo todavía no hemos llegado a cosas puntuales. Una de las tareas (dentro de dichas acciones) era que mandemos actividades en el salón de clases, y yo no sé qué paso pero nadie mandó actividades durante un mes […] no entendíamos lo que eran las actividades, no entendíamos que era dar las condiciones, no entendíamos eso.

En este sentido, muchos de los profesores participantes consideran que requieren cursos de este estilo, es decir, de cursos dirigidos y especializados en la didáctica de las matemáticas en el nivel superior, para poder hacer frente de manera más adecuada a las problemáticas que se les presentan. Pues una de las quejas más frecuentes de ellos sobre los cursos de actualización y formación es que son dirigidos a la enseñanza en general, dentro de los cuales no existen o existen muy pocos ejemplos concretos en matemática, y menos aún para la educación superior. No obstante, para ello primero debe incidirse sobre las expectativas de los mismos profesores sobre lo que deben esperar de dichos cursos, pues muchas de estas decepciones son resultado de exigencias de métodos y técnicas que puedan aplicar como "recetas" a sus clases y las cuales den un aprendizaje generalizado. Estas expectativas se vuelven en verdaderos obstáculos para incidir en el profesor. Veamos:

Extracto 3, sesión 4.

> Yo he tenido malas experiencias de cursos así como de didáctica de docencia […] desde el primero de ellos oía argumentos más o menos parecidos ¿no? Nos presentaban una nueva forma de dar clases que prometía buenos resultados… que el método tradicional […] y lo comparaban con lo peor que existía y decías ha bueno si sirve […], al tratar de aislar lo novedoso me daba cuenta de que no había gran diferencia, sino que es algo que ya existe sólo puesto de otra manera, entonces yo pienso que el método no es lo

> importante sino como se utilice y en que caso […] y no requerimos de más métodos o técnicas, sino simplemente aprender a usarlos en el momento adecuado.

Extracto 4, sesión 4.

> Una de mis principales quejas (en un curso de docencia tomado con anterioridad) era que no había nada en matemáticas, (y ante esa queja le respondían) – Ok. No hay nada, entonces que lo hagan ustedes”. -- cómo que háganlo -- digo – Se supone que vine a que me digas que hacer ¿no?, o que me des un libro nuevo donde diga que voy a hacer.

Aún cuando los profesores consideran necesaria la formación que les ayude a hacer frente a las problemáticas que han detectado, temen a la posible respuesta de los alumnos ante un cambio en la forma de dar clases, dado que su experiencia les ha demostrado que los alumnos tienden a dar un mínimo esfuerzo dentro de las clases, así como también, les preocupa la posible incomodidad de algunos de ellos con base a experiencias propias y creencias sobre las matemáticas.

Extracto 5, sesión 1.

> Sin embargo, el alumno, en un momento dado, ante prácticas diferentes, por que como quiera ya tiene una cierta práctica ¿no?, […] como que de repente hay tres o cuatro estudiantes que cuando se quieren hacer las cosas diferentes como que se ponen nerviosos ¿no?, empiezan a decir “haber, haber”. Por ejemplo la discusión en matemáticas a tres o a cuatro estudiantes no les gusta, yo por ejemplo soy uno de ellos, bueno quizás una de las razones por las que estudié matemáticas es por que ahí no había discusiones […] ahí era lo que tu pudieras demostrar eso es lo que es, entonces era la única carga eso.

Extracto 6, sesión 1.

> … si mi alumno no hace de su parte, no porque sea “burro”, porque no se le pega la gana, o sea de mi parte no hay mucho que yo pueda hacer y me he parado de cabeza casi, casi ¿no?, […] no tocan su libreta, y les da igual porque así están acostumbrados porque vienen con esa idea – me van a dar todo – un día antes estudian, copian la tarea, o sea, y esa mentalidad de la prepa se quita con trabajo.

Estas situaciones que los profesores han observado pueden erigirse como una barrera que obstaculiza un cambio en las responsabilidades entre profesor y alumno. Ellos consideran que no es factible dejar que el alumno se haga cargo de su aprendizaje debido a que éste no está preparado para ello. Ante esta supuesta “imposibilidad”, los profesores se ven en la necesidad de seguir haciéndose cargo de presentar los conocimientos y posteriormente exigir en cierta forma que los estudiantes los estudien.

Extracto 7, sesión 1.

> En la clase se hacen ejercicios, entonces lo que hace es que después se intercambien las libretas con su compañero de al lado, entonces su compañero de al lado se encarga de evaluar, entonces el fin no es que ponga la calificación y ya, sino el fin es que el estudiante que está evaluando tiene que entender antes el concepto, antes de poder calificar, o sea no se puede calificar bien o mal a su compañero si no sabe el concepto, él tiene que poner sus comentarios, de manera que se esta forzando al estudiante de manera indirecta a que el aprenda bien el concepto.

Otra característica que pudimos detectar sobre los profesores, es que no todos poseen un carácter reflexivo sobre su práctica docente.

Extracto 8, sesión 1.

> ¿Quién va ha determinar si estoy enseñando bien o no? O sea, es una pregunta fundamental, ¿Quién lo va a determinar?

Esta situación puede ser la causante de que el profesor cuestione de forma superficial la forma expositiva en que desarrolla las clases, dejando de lado el reflexionar sobre las acciones que realiza y su impacto en la motivación de los alumnos por el estudio. Se requiere pues, formar en el profesor una visión reflexiva de sus clases, sin embargo, dicha visión sólo puede crearse por medio de la práctica constante, la cual tal vez no todos saben como hacer. Por lo cual, se vuelve oportuno proporcionarle elementos que lo lleven a desempeñarse como un investigador dentro de sus clases.

Por otra parte, dentro del desarrollo del curso salieron a discusión algunas situaciones sobre las cuales los mismos profesores se han percatado, ya sea de acciones que favorecen o perjudican el aprendizaje de los alumnos, sin embargo, desconocen cómo incidir en ellas o utilizarlas a su favor, pues desconocen sus causas o aquello que sustenta su eficacia. De este modo se limita la aplicación de dichas acciones en otras situaciones.

Extracto 9, sesión 2.

> Cuando ellos salen de la prepa la única concepción que tienen es la operacional, entonces es difícil pasar de lo operacional a lo conceptual, pero porque lo quiere pasar de sopetón ¿no? […] es difícil pasar de lo conceptual a lo operacional pero porque no hay un puente que las una.

Extracto 10, sesión 1.

> otra manera, lo visual, hay muchos conceptos que se entienden muy bien con un dibujo, con un movimiento.

Extracto 11, sesión 4.

> Sabes que es bueno, un tema abordarlo desde diferentes enfoques, el de límite por ejemplo, una tabla sirve para ver lo que pasa en el límite, incluso en varias variables…

Comentarios como los anteriores nos permiten vislumbrar que la dualidad de los objetos matemáticos proceso-objeto, la visualización, el uso de la tecnología y el uso de diversos sistemas de representación, son temáticas cuyo conocimiento por parte de los profesores puede ayudar a una modificación real de sus prácticas, pues han sido vislumbradas como importantes y de ayuda real, habiéndose dado con esto un paso de importancia fundamental, pues las modificaciones a sus concepciones no sólo quedarían en su discurso, sino que tendrían una mayor posibilidad de llevarse a cabo en la práctica. Por otra parte, también pudimos darnos cuenta que la teoría de las situaciones didácticas, constituye un adecuado medio para incidir sobre las prácticas docentes de los profesores participantes, pues no contraviene las concepciones de los profesores respecto a la enseñanza y aprendizaje, al contrario parecen complementarse.

Extracto 12, sesión 3.

> Para mi aprender es algo duro, es un proceso nada lúdico y muchas veces hasta doloroso, […] pero esto (las situaciones didácticas) me parece factible.

Extracto 13, sesión 3.

> Yo creo que estos métodos favorecen costumbres, de que tú intentes por ti mismo buscar respuestas, y pues ya no es que simplemente te presenten las cosas y te las dan, yo siento que es mejor proceso mental (ésto), que tú intentar entender eso que te están diciendo, del modo que te lo están presentando.

Extracto 14, sesión 3.

> P1 Tendríamos que reconocer el carácter experimental de la matemática. De repente como que no estamos muy acostumbrados a reconocer ese carácter experimental de la matemática ¿no?
>
> P2 ¿Quiénes no lo consideramos? ¿los profesores?
>
> P1 Y en general los matemáticos, ¿no?, como que no vemos a las matemáticas con el carácter experimental.
>
> P3 Como sería en biología, química, economía…
>
> P1 Por ejemplo como que la matemática no la vemos así, la vemos más como axiomática, ya esta hecha, pero como que hasta hace poco tiempo se pensó en ver ese carácter experimental de la matemática ¿no? {…}, deberíamos recuperarlo y eso embonaría muy bien con la acción, formulación y validación, pero de repente no lo hemos reconocido así.

Sin embargo, para algunos profesores la dificultad del diseño de las situaciones es un problema para aceptar el cambio en la forma de enseñar, algunos esperan que ante un trabajo más complejo tengan la garantía de que dicho esfuerzo tendrá éxito.

Extracto 15, sesión 3.

> Si fuera el mismo resultado […], pero si el nuevo (la propuesta de la teoría de las situaciones didácticas) me lleva más tiempo y llegó al mismo resultado, entonces para que cambiamos, sino está siendo mejor…

Extracto 16, sesión 4.

> El método debe garantizar que el alumno aprenda, en todo caso debemos ser un experto en ese tipo de cosas para que funcionen…

Dentro de la fase de experimentación de la actividad didáctica y durante la discusión de los diseños didácticos elaborados por lo profesores, pudimos observar que los profesores tienen una gran preocupación por *institucionalizar* los conocimientos bajo estudio. Se sobrepone la necesidad del profesor de guiar al alumno hacia el conocimiento que se desea, de modo que tanto él como el alumno, al finalizar la sesión destinada para tal fin, puedan asegurar! que se ha tenido éxito en el logro del aprendizaje deseado, con la profundidad y formalidad requerida.

Extracto 17, sesión 3.

> P1 …muchas veces creemos que para que lo aprendan y lo entiendan se lo tenemos que explicar nosotros los profesores…

P2 Más que nada para que sepamos que si lo aprendieron.

Entonces una de las primeras acciones es convencer al profesor de la capacidad del alumno de generar aprendizajes por cuenta propia, siempre que se le sitúe en las condiciones donde dicho aprendizaje se favorezca, conocimientos que pueden no ser los esperados y adecuados, pero que tienen un imparto real sobre el aprendizaje de los alumnos. Esto es difícil de aceptar por los profesores. Se vuelve también necesario profundizar en su capacitación a éste respecto, que los ayude a comprender mejor las técnicas que se le proponen, pues en muchos casos, los conocimientos que se poseen no son suficientes.

A modo de conclusión

Dentro de los cursos de capacitación y formación didáctica/docente de los profesores, una de las exigencias más comunes es el establecimiento y comunicación de técnicas que puedan aplicar en sus clases y, muchas de las veces, que sirvan para guiar todo su desarrollo. Por lo general, esta idea está relacionada con las creencias de que en dichos cursos se establecerán métodos novedosos e innovadores, idea que algunos cursos promueven. Las inquietudes anteriores las pudimos observar en los profesores participantes en el curso-taller, las cuales se derivan de las concepciones que poseen del tema de didáctica, así mismo, en algunos profesores éstas provienen de la necesidad de satisfacer exigencias que otros cursos de formación no han logrado.

Resulta, entonces, que un punto a vencer dentro del curso-taller lo constituyen las experiencias no tan positivas que algunos profesores han tenido respecto de otros cursos de didáctica, los cuales frecuentemente poseen un carácter general de acción. Esto genera en los profesores un mayor índice de desconfianza respecto a lo que se les presenta y a su utilidad en la enseñanza, aprendizaje de las matemáticas. Esta situación nos hacer ver la necesidad de promover cursos centrados en la propia matemática, que lo ayuden a atender las problemáticas inherentes a la disciplina, siendo ésta una exigencia de los profesores.

En lo que respecta a nuestro caso, la teoría de las situaciones didácticas se presenta como un punto central sobre el cual pueden basarse y girar las acciones encaminadas a la capacitación de los profesores referente a la didáctica de las matemáticas. Los profesores encuentran que dicha teoría es concordante, o al menos no contraviene fuertemente, sus creencias y concepciones sobre la forma en que se aprende. Esto constituye una gran "ventaja" sobre otras temáticas, pues los profesores no objetarían sus beneficios y se tendría una mayor posibilidad de impacto real sobre las prácticas y no únicamente sobre el discurso. No obstante, la expectativa que genera ésta o cualquier otra acción encuentra un fuerte punto de discusión en la acción que los alumnos deben realizar, pues ante propuestas que dirijan una mayor responsabilidad a los alumnos, los profesores parecen presentan una mayor desconfianza, pues su experiencia les ha hecho instaurarse la idea que no todos los alumnos responderían con el mismo interés. Sin embargo, no son reflexivos sobre lo que causa tal desmotivación, siendo en la mayoría de los casos, las mismas actividades a desarrollar en el salón de clases, al tener éstas un alto nivel de complejidad. Esto se complementa con la necesidad de los profesores de presentarles a los alumnos las definiciones y teoremas que les "asegure" que los alumnos han "aprendido" matemáticas (formalmente). Parecería que el decirle a los alumnos éste es el concepto y ésta su definición, les confiriera la certeza de que se ha aprendido y comprendido el objeto de estudio. Cabe señalar que los profesores en sus actuales prácticas, consideran necesario que el alumno busque el conocimiento, acción que parece tornase contradictoria con las ideas anteriores.

Las situaciones anteriores deben ser contempladas al momento del diseño de cursos de capacitación de los profesores, pues como pudimos observar gran parte del éxito de ellos dependerá de que el profesor encuentre como concordantes con su epistemología las propuestas que le son echas, aún cuando éste sea conciente de la necesidad de un cambio en su quehacer didáctico.

En nuestra opinión y con base en la experiencia de esta propuesta de capacitación, se deben organizar las acciones destinadas a la formación de los profesores en etapas más accesibles y congruentes con sus concepciones, buscando que etapas y concepciones evolucionen a la par. Se requieren pues, procesos de formación sistemáticos que incidan de forma constante en las acciones de los profesores, de forma que éstos tengan tiempo de poner en práctica los elementos proporcionados durante el curso y madurar así sus ideas, para luego complementar tales acciones con otros elementos.

Por último, quisiéramos agregar que las temáticas referentes a la dualidad objeto-proceso de los conceptos matemáticos, el uso de la tecnología como herramienta cognitiva, la visualización, los diferentes registros de representación de los conceptos matemáticos, constituyen temáticas que pacieran ser aceptadas por los profesores, pues ha sido vislumbrada su utilidad durante su experiencia docente. Por su parte, el lenguaje y pensamiento variacional aún cuando fue un tema de gran discusión y que motivó cambios en el discurso de los profesores, parece ser tomado como con recelo, pues consideran que muchas de tales acciones son relativas a la forma de aprender del alumno, así como que la idea depende más de la experiencia y de un largo tiempo para desarrollarse.

Agradecimientos

Los autores hacen público el agradecimiento por el apoyo brindado del proyecto de Fondos Mixtos-CONACYT, Gobierno del Estado de Yucatán, clave: Yuc-2004-C03-033 para la realización de este trabajo.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 8 (3), 259-267

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 12 (1), 5-38.

Campanario, M. (2003). Contra algunas concepciones y prejuicios comunes de los profesores universitarios de ciencias sobre la didáctica de las ciencias. *Revista Enseñanza de las ciencias*, 21 (2), 319-328.

D`Amore, B. y Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 3 (1), 33-45.

García, E. (2006a). *Una caracterización de la cultura didáctica al interior del aula de cálculo. Factor reflexivo del quehacer docente en los estilos de aprendizaje.* Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, México.

García, E. (2006b). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elementos de análisis en la reprobación y rezago de cálculo.* Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, Yucatán, México.

Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8 (1), 69-90.

Vivas, M. et. al. (2003). Propuesta para la formación del profesorado universitario. *Revista Acción pedagógica,* 12 (2), 60-66.

LA NOCIÓN DE SERIACIÓN EN NIÑOS PREESCOLARES DEL ESTADO DE GUERRERO

Pablo Cruz Bernal, Crisólogo Dolores

Centro de Investigación en Matemática Educativa UAG

crurom@prodigy.net.mx, cdolores@prodigy.net.mx

Reporte de investigación

Resumen

La enseñanza de la matemática en el nivel preescolar es y ha sido uno de los aspectos poco atendido por los investigadores en matemáticas en México, dejando este trabajo a profesores en servicio o a psicólogos. Desde 1981 en este nivel, en los planes y programas se ha tomado como fundamento a la psicogenética para el tratamiento de los contenidos, dentro de esta teoría se considera fundamental el tratamiento de las nociones de clasificación y seriación para que los pequeños se apropien del concepto de número. En el presente escrito se describe el trabajo realizado con niños de 4 – 7 años y los resultados obtenidos. Encontramos que aproximadamente el 30% de los niños logra realizar tareas de seriación, importantes para el desarrollo del pensamiento variacional, que parece no corresponder con los resultados que Piaget y colaboradores afirman. También se encontró que la enseñanza de la matemática en este nivel continua desarrollándose de forma tradicional, donde la memorización parece predominar.

Palabras clave: Seriación, Clasificación, Educación Preescolar, pensamiento variacional.

Introducción

El aprendizaje de la matemática es uno de los mayores problemas con el que se encuentra la Educación Básica en México, y en esto coinciden una investigadores como Guevara Niebla

(1992), Ferreiro (1995), Trejo (1991), los cuales señalan que se presenta desde los primeros años de la educación básica, que comprende a preescolar, primaria y secundaría, hasta los estudios profesionales y de posgrado.

Haciendo un recuento de los trabajos de investigación que se han enfocado sobre el tema de la enseñanza de la matemática, podemos observar que el problema del aprendizaje de la matemática no es privativo de México. En Brasil, Nunes (1997) realiza un estudio sobre la construcción de la matemática cotidiana, en el que señala que más que la atención escolarizada, la matemática escolar, es el entorno y las necesidades que se le presentan al niño en su trabajo cotidiano, los que originan que desarrolle el pensamiento matemático. Son también importantes los trabajos realizados en España por Moreno (1996), relacionados con la clasificación y la seriación en niños pequeños, concluyendo que el desarrollo de la noción de la seriación en niños preescolares es fundamental para la apropiación del concepto de número. Un niño que no ha logrado desarrollar esta noción tendrá grandes dificultades al momento de operar con números. Lograr que el niño desarrolle la noción de seriación, en la que están implícitas las relaciones de transitividad y reversibilidad, le permitirán desarrollar el pensamiento variacional, en el que pronosticar el comportamiento de una serie inicial, le ayuda a pronosticar el resultado.

Duhalde y González (1997), hacen una recopilación de trabajos sobre el problema de la construcción de conceptos matemáticos en niños en edad preescolar. Hacen referencia a la importancia de la clasificación y la seriación en la conceptualización del número. Señalan la importancia de que el niño construya la noción de seriación, ya que esto muestra que el niño ha construido dos importantes relaciones: la reversibilidad y la transitividad, lo que le permitirá al niño operar con los números.

Vergnaud (1985) describe una relación de nociones que el niño debe ir construyendo de manera paulatina y señala que existen graves errores de procedimiento al trabajar la noción de clasificación, que es anterior a la seriación. Denomina a la seriación como un descriptor ordinal en el que el niño, además del análisis de las semejanzas, realiza análisis de las diferencias entre los objetos. Señala que la distinción entre las diferencias, que está definida por las características objetivas de los objetos, no es así entendida por los niños en el transcurso de su desarrollo. El niño pequeño no recurre a escalas objetivas de medida, no se molesta en saber, por ejemplo, si la diferencia entre grande y mediano es la misma que entre mediano y pequeño, o sea, el descriptor ordinal es aquel que permite asociar a los objetos números de orden. Hace mención que esta noción de descriptor de orden se desarrolla en el niño lentamente, por ejemplo el tamaño o grosor de los objetos, antes de dar lugar a verdaderas medidas de longitud, de superficie o de volumen son consideradas, hasta los siete o los diez años, como simples descriptores ordinales. Afirma que, incluso, en los niños más pequeños, las categorías de "*grande*" y "*pequeño*" son tratadas más como simples valores cualitativos que como valores ordenados. Menciona un testimonio de lo anterior en el hecho de que los niños de cinco o seis años no son capaces de expresar una relación comparativa de la forma "*el objeto x es más grande que el objeto y*", y se quedan en una formulación como "*x es grande, y es pequeño*". Por último asevera que la noción de número, la más importante de las nociones aprendidas en la educación primaria, lejos de ser una noción elemental que no tiene relación con otras relaciones, se apoya en otras nociones, entre las que desataca la relación de orden.

Kamii (1988) reporta que la construcción de las nociones de clasificación y seriación, así como las relaciones de transitividad y cardinalidad, son importantes, ya que de no haberlo adquirido en los primeros grados de primaria, cuando tenga que resolver problemas en grados posteriores, elaborará procedimientos para cada uno de ellos, sin hacer uso de razonamientos lógicos, teniendo que hacer uso intensivo de la memoria. Este aprendizaje estará desconectado, si como lo señala Vergnaud (1985), no se establecen una serie de redes de relaciones cuando el niño construye sus aprendizajes.

Ríos Silva (1990) realiza un trabajo de investigación sobre la enseñanza de la matemática en educación preescolar, señalando que dado el carácter formativo de la educación preescolar, la matemática no es considerada como una materia específica. Con respecto a la seriación reporta que en el trabajo cotidiano en las escuelas preescolares casi no se observaron actividades relacionadas con esta noción, y las pocas que se observaron, no las relacionaba con ella; por ejemplo al comparar los tiempos de llegada a la escuela. La educadora, señala, está más interesada en que el niño aprenda la serie numérica en forma oral y su representación gráfica antes que la forma en que el niño construye la noción de seriación.

Barocio (1996) realiza en 1990, una investigación sobre la enseñanza de la matemática en educación preescolar, bajo la perspectiva psicogenética. Hace notar que en el trabajo de diagnóstico, las respuestas sobre que enseñar en preescolar hechas a maestros, decían que lo más importante a enseñar es el concepto número. Más colaborar para que el niño construya las nociones matemáticas elementales, estaban más preocupados en como enseñar a contar y a realizar operaciones. Señala que, tarde o temprano, los niños alcanzaran la noción de conservación del número, con apoyo del docente o sin él.

Las operaciones concretas y la noción de seriación

Como puede observarse la noción de seriación es poco desarrollada por los educadores en el nivel de preescolar y los primeros años de primaria. Más enfocados sobre la serie contada o cantada a fin de que el niño se apropie del concepto de número, han dejado de lado estrategias que permitan que los pequeños se apropien de la noción de seriación, la cual cuando es desarrollada adecuadamente lleva al pequeño a apropiarse de dos relaciones importantes: la reversibilidad y la transitividad, elementos fundamentales para la formación del pensamiento variacional, y que es necesario para la apropiación del concepto número.

La clasificación y la seriación han sido de los contenidos matemáticos que han estado presentes desde 1981 en los planes y programas de estudio de la educación preescolar en México. La clasificación constituye la ordenación de objetos en función de sus semejanzas y diferencias; y **la seriación**, en ordenar los objetos. En matemáticas se llama relación de orden sobre un conjunto M a toda relación **O** en M (o sea de M en M) que verifique las propiedades:

Reflexiva $a \text{ O } a$
Antisimétrica $(a \text{ O } b) \text{ O } (b \text{ O } a) \Rightarrow a = a$

Transitiva $(a \text{ O } b) \wedge (b \text{ O } a) \Rightarrow a \text{ O } a$

Uno de los procesos fundamentales que se operan en el estadio preoperatorio, de acuerdo a Piaget, que le permiten al niño conocer su realidad de manera cada vez más objetiva, es la organización y preparación de las operaciones concretas del pensamiento, las cuales se desarrollarán entre los 7 y los 12 años aproximadamente.
Se llaman operaciones concretas aquellas operaciones lógicas que se refieren a las acciones que el niño realiza con objetos concretos y a través de las cuales coordina las relaciones entre ellos. La idea central es que el niño aún no puede realizar estas operaciones independientemente de las acciones sobre objetos concretos, es decir, que no puede reflexionar sobre abstracciones. Las operaciones más importantes al respecto son: *la clasificación, la seriación y la noción de conservación de número.*

La clasificación
Constituye una serie de relaciones mentales en función de las cuales los objetos se reúnen por semejanzas, se separan por diferencias, se define la pertenencia del objeto a una clase y se incluyen en ella subclases. En suma, las relaciones que se establecen son las de semejanza, diferencia, pertenencia e inclusión. La construcción, de acuerdo a Piaget, de la clasificación pasa por tres estadios. En el primer estadio (hasta los 5 ½ años aproximadamente), los niños reúnen los objetos formando una figura en el espacio y teniendo en cuenta solamente la semejanza de un elemento en función de su proximidad espacial. Estas colecciones figurales pueden darse también alineando los objetos en una sola dirección, en dos o tres direcciones (horizontal, diagonal, vertical) o formando figuras más complejas, como cuadrados, círculos o representaciones de otros objetos. Dentro del segundo estadio (de 5 ½ a 7 años aproximadamente) el niño comienza a reunir objetos formando pequeños conjuntos. El progreso se observa en que toma en cuenta las diferencias entre los objetos y por eso forma varios conjuntos separados, tratando de que los elementos de cada conjunto tengan el máximo de parecido entre sí. Por ejemplo, cuando se le dan cubiertos y se le pide que ponga junto lo que va junto, él buscará dos cucharas idénticas, o los tenedores idénticos, sin llegar a poner juntas todas las cucharas y todos los tenedores, por el simple hecho de serlo.
Progresivamente y partiendo de pequeños conjuntos (o colecciones) basados en un criterio único, los reúne para formar colecciones mayores, es decir, reúne subclases para formar clases. Cuando se le dan revueltas rosas y claveles, por ejemplo, y se le pide que ponga juntas las flores, él agrupa todas las rosas y en otro conjunto todos los claveles. Ya en un estadio más avanzado reunirá todas las flores. A veces parten de colecciones mayores que luego subdividen. Esta forma de actuar indica que el niño ha logrado la noción de pertenencia de clase. Sin embargo, él aún no maneja la relación de inclusión, ya que no puede determinar que la clase tiene más elementos que la subclase (por ejemplo, que hay más flores que rosas, porque las rosas son una subclase de las flores).

De los siete años en adelante, en el denominado tercer estadio, la clasificación es semejante a la que manejan los adultos y generalmente no se alcanza en el periodo preescolar. En este estadio se llega a construir todas las relaciones comprendidas en la operación clasificatoria, hasta la inclusión de clases.

La seriación

Esta es una operación en función de la cual se establecen y ordenan las diferencias existentes relativas a una determinada característica de los objetos, es decir, se efectúa un ordenamiento según las diferencias crecientes o decrecientes (por ejemplo, del tamaño, grosor, color, temperatura, etcétera). La seriación pasa, a su vez, por diversos estadios: en el *primer estadio* (hasta los 5 años aproximadamente) el niño no establece aún las relaciones "mayor que..." y "menor que...". Como consecuencia, no logra ordenar una serie completa de objetos de mayor a menor o de más grueso a más delgado, o de más frío a menos frío, etcétera, y viceversa, sino que hace parejas o tríos de elementos.

Como una transición al siguiente estadio, logrará construir una serie creciente de cuatro o cinco elementos. En estos casos suele darle un nombre a cada uno: por ejemplo, "chiquito", "un poco chico", "un poco mediano", "grande", etcétera. Aún cuando los términos correctos no aparecen, el niño logra establecer relaciones entre un número mayor de elementos. En el segundo estadio (de 5 a 6 ½ o 7 años aproximadamente) el niño logra construir series de 10 elementos por ensayo y error. Toma un elemento cualquiera, luego otro cualquiera y lo compara con el anterior y decide el lugar en que lo va a colocar en función de la comparación que hace de cada nuevo elemento con los ya que tenía previamente. No puede anticipar la seriación sino que la construye a medida que compara los elementos, ni tiene un método sistemático para elegir cuál va primero.

A partir de los 6 o 7 años aproximadamente, el niño llega al tercer estadio de la seriación. El niño puede anticipar los pasos que tiene que dar para construir la serie, y lo hace de una manera sistemática, eligiendo por ejemplo lo más grande para comenzar, o lo más grueso a lo más oscuro, etcétera, siguiendo por el más grande que queda, etcétera, o a la inversa, comenzando por el más pequeño, o el más delgado, o el más claro.
El método que utiliza es operatorio. Por medio de él, el niño establece relaciones lógicas al considerar que un elemento cualquiera es a la vez mayor que los precedentes y menor que los siguientes, y que si un determinado elemento es mayor que el último colocado, sería también mayor que los anteriores (puede ser el mayor, o el más oscuro, o el más grueso, o el más áspero, etcétera).Esto supone que el niño ha construido las dos propiedades fundamentales de estas relaciones, que son ***la transitividad y la reversibilidad***.

La transitividad consiste en poder establecer, por deducción, la relación que hay entre dos elementos que no han sido comparados previamente, a partir de las relaciones que se establecieron entre dos elementos. Por ejemplo:

Si 2 es mayor que 1, y 3 es mayor que 2, entonces 3 será mayor que 1; y a la inversa:
Si 1 es menor que 2 y 2 es menor que 3, entonces 1 será menor que 3;

Si el primero es más caliente que el segundo y el segundo más caliente que el tercero entonces, el primero es más caliente que el tercero. La reversibilidad significa que toda operación comporta una operación inversa; esto es si se establecen relaciones de mayor a menor, se pueden establecer relaciones de menor a mayor; a una suma corresponde una operación inversa que es la resta, etcétera.

La noción de conservación del número

Durante la primera infancia solamente los primeros números (del 1 al 5) son accesibles al niño, porque puede hacer juicios sobre ellos basándose principalmente en la percepción, antes que en el razonamiento lógico. Entre los 5 y 6 años, el niño hace ya juicios sobre 8 elementos o más, sin fundamentarlos en la percepción. La serie indefinida de números, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, como operaciones formales, comienzan a ser accesibles al niño después de los 7 años.

El número puede considerarse como un ejemplo de cómo el niño establece relaciones no observables entre objetos, es decir, que no corresponden a las características externas de ellos. Por ejemplo, decimos que “hay cinco muñecas”. Las muñecas se pueden observar, existen en la realidad, pero el cinco es una relación creada. Si el niño no establece una relación mental entre las muñecas, cada una podría quedar aislada.

La forma como estas operaciones intervienen se aclara con el siguiente ejemplo: Si se pide a un niño de 4 a 5 años contar un conjunto de elementos, y él sabe contar hasta 10, lo hará saltando de uno a otros sin un orden determinado, por lo que no contará algunos elementos o contará otros más de una vez. Puede ser que nos diga que hay 10, y cuando se le pide que señale los 10, señalará el último que contó, lo cual se debe a que está considerando los elementos aislados y no formando parte de un conjunto, es decir, que el 10 o el 8 son nombres dados a cada elemento (como lo sería “Juan” o “Pedro”, etcétera, para cada niño) y no la cantidad que representa el conjunto.

Aquí podemos ver la necesidad de un ordenamiento para distinguir cada elemento y no contarlo dos veces o dejarlos de contar (seriación) y también la necesidad de establecer una relación de inclusión de clases (clasificación), lo cual significa que el 1 está incluido en el 2, el 2 en el 3,... , el 9 en el 10, etcétera, es decir, que cuando el niño dice 10, no pensará en el 10 como “nombre”, sino en el 10 como “cantidad” que incluye los números anteriores.

Así vemos como la noción de número es una síntesis de las operaciones de clasificación (inclusión de clases) y seriación.

Para que se estructure la noción de número, es necesario que se elabore a su vez la noción de conservación de número. Esta consiste en que el niño pueda sostener la equivalencia numérica de dos grupos de elementos, aún cuando los elementos de cada uno de los conjuntos no estén en correspondencia visual uno a uno, es decir, aunque haya habido cambios en la disposición espacial de alguno de ellos. La noción de conservación de número pasa a su vez por tres estadios:

De los 4 a 5 años aproximadamente, en el denominado primer estadio, el niño no puede hacer un conjunto equivalente cuando compara globalmente los conjuntos; no hay conservación y la correspondencia uno a uno está ausente. en el segundo estadio (de 5 a 6-7 años aproximadamente) los pequeños pueden establecer la correspondencia término a termino, pero la equivalencia no es durable: así, cuando los elementos de un conjunto no están colocados uno a uno frente a los elementos del otro conjunto, el niño sostiene que los conjuntos ya no son equivalentes, es decir, que tiene más elementos el conjunto que ocupa más espacio, aunque los dos tengan 8 y 8 o 7 y 7; es hasta el tercer estadio (a partir de los 6 – 7 años aproximadamente) cuando el niño puede hacer un conjunto equivalente y conservar la equivalencia, e entonces cuando existe la conservación del número. La correspondencia uno a uno asegura la equivalencia numérica independientemente de las transformaciones en la disposición espacial de los elementos. A pesar de las transformaciones externas, el niño asegura a través de sus respuestas:

- La identidad numérica de los conjuntos, es decir, que si nadie puso ni quitó ningún elemento, y que si sólo fueron movidos, la cantidad permanece constante;
- La reversibilidad, esto es, que si las cosas se movieron, regresándolas a su forma anterior, se verá que existe la misma cantidad; y
- La compensación, lo cual significa que a pesar de que la fila que ocupa más espacio parece tener más, de hecho tiene la misma cantidad, puesto que hay más espacio entre cada uno de los elementos.

Objetivo de la investigación

A través de este trabajo se pretendió explorar el estado en que se encuentra la noción de seriación en los niños de 5 – 6 años que asisten a instituciones de educación preescolar, en la ciudad de Chilpancingo, Gro.

Metodología

Se diseñaron una serie de pruebas, las cuales son variaciones del método clínico de Piaget y Szeminska y citadas por Inhelder (1975). Las sesiones fueron video-grabadas a fin de que posteriormente pueda ser analizada.

Las actividades que realizamos fueron de tres tipos: Seriación con palillos, Seriación con Tablillas y Seriación con Prismas Cuadrangulares y Cilindros de Base Variable. Cada una de ellas se dividió en dos partes: en la primera los niños efectuarían una seriación, que denominamos, al descubierto, en esta elaborarían una serie ordenada colocando los palillos, tablillas o prismas de acuerdo al tamaño, de menor a mayor y posteriormente de mayor a menor; la segunda la llamamos con pantalla, ya que para la construcción de la serie se coloca una pantalla entre el entrevistador y el niño a fin de que no observe como se construye la serie; este elaboraría una serie, eligiendo entre los que tenía a su alcance los que considera corresponden, uno a uno, del de menor tamaño al de mayor tamaño y viceversa.

El procedimiento de aplicación de la prueba fue el siguiente:

- se recibe al niño (a), comentando algunos aspectos que se considera son de interés para él.
- posteriormente se le invita a participar en la actividad, preguntándole si le gusta jugar, mencionándole que es precisamente lo que se hará durante un rato,
- enseguida se le entrega al niño el material en desorden y se le dice: ”Tú vas a hacer una bonita escalera con todos objetos, acomodándolos del más chico al más grande (del más grande al más pequeño),
- en caso de que el niño no comprenda o si hace una escalera sin base, el educador efectúa una demostración con tres palillos e invita al niño a continuar la serie.

Para el caso con la pantalla se procedió de manera semejante.

Al finalizar se le pregunta al niño si considera está correcto lo realizado, en caso de que su respuesta sea negativa se le pregunta si desea cambiar o colocar alguno de los palillos en otro lugar (estas preguntas solamente sirven para orientar el trabajo y no tratan de modificar o inducir a una respuesta determinada).

Para la seriación detrás de la pantalla, se colocó al niño detrás de una pantalla, y se le dieron los palillos en desorden. Las instrucciones que el entrevistador le da al niño son: "Ahora yo voy a hacer una escalera, dame los palillos uno a uno, en el orden en que debo ponerlos para hacer una escalera igual de bonita que la que hiciste tú, del palillo más pequeño, al más grande…"

Para la realización de esta actividad utilizamos un conjunto de 10 - 11 palillos, iniciando con el de 6.0 cm, con un desfase entre cada uno de ellos de 0.6 cm., las tablillas tenían un ancho de 1.5 cm. variando la longitud en 0.8 cm, entre una y la siguiente, iniciando en 6 cm.
Se construyeron también una serie de 10 cuadrados de madera, con una variación de 1 cm, iniciando en 3 cm de lado y otra serie de 10 círculos de madera, empezando con un círculo de 3 cm de diámetro y variando 1 cm entre cada uno de ellos.

Las actividades propuestas se realizaron en tres ocasiones: la primera se realizó en las instalaciones de la Escuela Normal Preescolar "Adolfo Viguri Viguri" de la ciudad de Chilpancingo, Gro., y se trabajó con 6 niños. La segunda se realizó en el CENDI "Clementina Batalla de Bassols" del mismo lugar, con 7 alumnos del tercer grado de preescolar. La tercera se efectuó en las instalaciones de la Escuela Normal, con 5 niños.

Resultados

De los 18 niños con los que se trabajó se obtuvo lo siguiente:

- 5 de ellos pudieron elaborar la serie con éxito, así como también se observo la reversibilidad y la conservación de la cantidad;
- 9 de los pequeños solamente pudieron completar parcialmente la serie, no tenían desarrollada la reversibilidad ni la conservación;
- 3 de los niños no pudieron realizar parcialmente la serie (no más de tres elementos)

	Edad Años/mes	**Seriación con palillos**	**Seriación tablillas**	**Seriación prismas**	**Reversibilidad**	**Conservación Cantidad**
NOBU	5/8	3	3	3.	SI	SI
L. MANUEL	5/0	2	2	2	NO	NO
XOCHITL	5/0	1	1	1	NO	NO
JAVIER	5/0	2	2	2	NO	NO
DAVID	6/0	2	2	2	NO	NO
JOSE	5/7	3	3	3	SI	SI
OLEGARIO	5/6	3	3	3	SI	SI

L. ALBERTO	6/0	2	2	2	NO	NO
KENIA	6/0	2	2	2	NO	NO
J. ALFREDO	6/0	3	3	3	SI	SI
MIRIAM	5/0	2	2	2	NO	NO
JOSÚE	6/0	3	3	3	SI	SI
KAREN	5/6	2	2	2	NO	NO
ERIKA	5/6	2	2	2	NO	NO
SHEILLA	6/0	1	1	1	NO	NO
IRLANDA	7/0	2	2	2	NO	NO
NATIVIDAD	7/0	2	2	2	NO	NO
JOSE A.	5/0	1	1	1	NO	NO

Tabla 1

Para realizar la seriación, tanto para los que tienen éxito, como para los que no, cada uno de ellos usa procedimientos diferentes, esto se pudo notar de manera muy clara ya que de los 18 niños con los que se trabajó, cada uno de ellos usaba formas distintas. Algunos hacían una primera ordenación y después rellenaban los "huecos", quizá utilizando comparaciones y la relación de transitividad; otros realizaban una "ordenación" que no obedecía a un patrón de seriación, un agrupamiento de palillos disparejo; otros manifestaban imposibilidad de usar la transitividad y empleaban mucho tiempo ensayando acomodos; hubo quien ni siquiera pudo acomodar los palillos en desorden.

El procedimiento que siguieron los niños que pudieron realizar la actividad fue observar los objetos (palillos, tablillas o prismas), posteriormente tomaban uno o dos y a partir de esto los iban comparando por parejas y ubicándolos en el lugar correspondiente hasta finalizar.

Otra forma de construir lo que se pedía, era ordenar en forma ascendente hasta llegar a un palillo o tablilla grande y a partir de ésta elaborar otra descendente.

Los resultados obtenidos de las observaciones indican que de los 17 niños con los que se trabajó solamente 5 logran construir la serie con éxito. De acuerdo con Piaget - Inhelder estos niños se encontrarían en la etapa de la seriación sistémica, es decir utilizan procedimientos propios para operar con los objetos; a esta etapa Coll (1995), Armilla (1996), Hidalgo (1992) y Moreno (1996) le denominan nivel operatorio. De acuerdo a la psicología genética, los niños que logran realizar esto tienen edad cronológica mayor a 7 años. Los niños que tuvieron éxito tenían 6 años o menos; dos de ellos asisten a Jardines de Niños distintos, los otros dos fueron del CENDI. Cuando se platicó con las maestras sobre el medio en que se desarrollan los niños que tuvieron éxito, se notó que la familia e inclusive los maestros estimulan a los niños a la realización de tareas más complejas.

Diez de los niños observados podrían estar incluidos, de acuerdo a Inhelder y Piaget, en la etapa intermedia, es decir, construyen una serie ordenada de cuatro o cinco palillos, pero no pueden intercalar las barritas restantes. Tres de estos niños asisten a primer grado de primaria y de acuerdo su nivel de desarrollo ya deberían construir una serie bien ordenada, es decir la noción de clasificación y seriación debería estar ya manifiesta, ya que son dos nociones fundamentales para la conceptualización del número. Tres de los niños solamente pudieron formar parejas y ternas yuxtapuestas, es decir establece relaciones incoherentes, sin conexiones causales ni relaciones lógicas. De acuerdo a Piaget, estos niños podrían estar en la etapa de las organizaciones sincréticas, o sea, los niños perciben la realidad con una visión global y bajo esquemas subjetivos, su razonamiento pasa directamente por un acto intuitivo de una premisa a una conclusión. De todos ellos solamente uno no pudo terminar la ordenación solicitada, a pesar de que el observador lo animaba y le ayudó en un determinado momento con una serie de tres elementos.

Conclusiones

Hay coincidencia entre varios investigadores de la importancia del desarrollo de la noción de seriación en los niños preescolares, lo cual le permitirá una sólida construcción del concepto de número para el desempeño posterior en el área matemática. Sin embargo, no hay coincidencias en cómo el niño construye dicha noción.

Para autores como Kamii (1988), lo importante es crear ambientes educativos que favorezcan dicho desarrollo a través de la oportunidad para establecer relaciones de clasifiación y seriación. Vigotsky (1988) señala que la parte escolarizada para la formación de nociones, pseudoconceptos en preescolar, es fundamental, ya que esto les permitirá a los niño construir conceptos científicos, más aún apropiarse del concepto. Aunque sus trabajos los hace con la escritura y lenguaje, señala que se sigue el mismo proceso en la aritmética y las ciencias naturales.

De acuerdo a los resultados de las observaciones realizadas en los 18 niños, en términos generales podemos afirmar que no existen en ellos, un desarrollo coherente de los procesos básicos para la construcción de la noción de seriación, tales como las relaciones de comparación, de transitividad y de reversibilidad. Pues la gran mayoría realiza esto a través de ensayo y error, teniendo cada uno su propia manera de realizar esta actividad. Si en el ambiente escolar hubieran realizado actividades encaminadas al desarrollo de esta noción, al menos los niños que pertenecían a la misma institución lo hubieran reflejado en las observaciones.

En los niños que tuvieron éxito, podemos señalar que el entorno, ambiente del cual provienen los niños, parece ser muy importante. Aquellos que tuvieron éxito tenían la característica común de que el ambiente familiar y escolar favorecía las actividades que se les pedía realizaran. Esto es importante de señalar pues dentro de la teoría psicogenética se señala que los niños pueden realizar una serie ordenada hasta haber superado el estadio preoperacional, alrededor de los 6 años y medio, edad cronológica que no tenían los niños que operaban adecuadamente la serie, mientras que hubo niños con una edad mayor, 6-7 años, que no lo pudieron hacer.

Los resultados que arrojó este trabajo nos inducen a pensar en la necesidad de realizar trabajos de investigación que lleven a identificar las características del niño tomando en cuenta los diversos aspectos con los que interactúa (familia, entorno, nivel socioeconómico…). Es necesario, asimismo, actualizar y capacitar a las educadoras en el desarrollo de las nociones básicas, así como en el diseño de estrategias educativas que construyan ambientes que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático, en específico, la noción de seriación. Así pues, cuando el niño más tarde en construir la noción de seriación, mayores dificultades tendrá para apropiarse del concepto de número y con ello de los procesos de variación, tan importante en el área matemática.

Referencias

Aguirre E., y Sandoval Ma. (1995). *Iniciación a la matemática y a la lectoescritura.* México: Edit. Sitesa.

Andréiev I. (1984). *Problemas lógicos del conocimiento científico*. Moscú: Progreso,

Castorina A., et al. (1996). *Piaget, Vigotsky*: *Contribuciones para replantear el debate.* México: Paidos,

Castorina, A. et al. (1998). *Piaget en la educación.* México: Paidos – UNAM – CEU.

Castro, E. Rico, L.; Castro E. (1995). *Estructuras aritméticas y su modelización.* Grupo Bogotá: Edit. Iberoamérica,

Coburn, L. y Lai T. (1998). *La educación preescolar. Los mitos y la realidad*. Comité Organizador de la Unidad . Seattle Central Community College, Seatle, EE.UU. Retrieved September, 30, from de Word Wide Web: publish@cts.com

Coll, C. (compilador). (1995), *Psicología genética y aprendizajes escolares*, 5ª Edición, Madrid: España Edit. Siglo XXI

Cruz, P. (2000). *La noción de seriación en niños de preescolar.* Tesis de Maestría en Ciencias, Área Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Chadwick, M., y Tarky, I. (1990). *Juegos de razonamiento lógico.* Santiago de Chile: Andrés Bello,

Dolores, C. (1997). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar.* Proyecto aprobado y financiado por el CONACYT, Registro: 25640-S.

Duhalde, E., González C. (1997). *Encuentros cercanos con la matemática*, 2ª Edición, Buenos Aires: AIQUE

Fregoso, R. (1980). *Los elementos del lenguaje matemático*, México: Trillas,

Gimeno, J.*(1989). Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo*. España: Anaya,

Ginsburg H. Y Opper S. (1986). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual*. Trad. Alfonso Alvarez Villar , Edit. Prentice-Hall, Bogotá

Guerrero.(1998). *Educación*. Retrieved October 15, 1998, from de Word Wide Web: http://www.com.mx/guerrero/educacio.htm

Inhelder, B., (1975), Aprendizaje y estructuras del conocimiento, 2ª. Edición. Madrid: Morata.

Kamii, C. (1988). Primary Arithmetic: Children inventing their own procedures. Retrieved june 15, 1999 from the Word Wide Web: www.enc.org/reform/journals/104005/4005.htm

Lovell, K. *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. 7ª Edición. España: Morata.

Moreno, M., Sastre G. (1996). *Aprendizaje y desarrollo intelectual.* 3ª Edición. España: Gedisa,

Nesher P. And Kilpatrick (comp). (1990). *Mathematics and Cognition*, Cambridge: University Press

Nunes T. y Bryant P. (1997). *Las matemáticas y su aplicación. La perspectiva del niño.* trad. Susana Guardado, Edit. Siglo XXI, México

Piaget, J. (1995). *La equilibración de las estructuras cognitivas .problema central del desarrollo.*

3ª edición. México: Siglo XXI.
Piaget, J. (1995), *El estructuralismo*, trad. Claudia A. Loeffler B. México: CONACULTA.
Piaget, J. y Inhelder B. (1993). *Psicología del niño.* trad. Luis Hernandez Alonso. 13ª Edición. Madrid: Morata.
Resnick, L.B. Y Ford W.W.,(1990) *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. trad. Alejandro Pareja. Barcelona: Paidos
Ríos R. M. (1991). *"La enseñanza de la matemática en el nivel preescolar"* en Educación matemática, Vol3, No.2, Agosto. México.
Salinas, S. *et al* (1998). *La matemática en Educación Preescolar (Tesis)*. Esc. Normal Preesc. "Adolfo Viguri Viguri". Guerrero, México.
SEP (1992). *Lecturas de Apoyo, Educación Preescolar.* México: SEP.
SEP(1992). *Programa de Educación Preescolar 1992.* México: SEP.
SEP(1981). Cuadernos, *Programa de Educación Preescolar. libros 1,2 y 3, apoyos metodológicos*. México: SEP.
SEP(1993). *Bloques de juegos y actividades en el desarrollo de los proyectos en el jardín de niños.* México: SEP
Vergnaud, G. (1985), *El niño, las matemáticas y la realidad*, Trad. Luis Ortega Segura, 3ª Edición, Edit. Trillas, México
Vigotski L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Trad. Silvia Furió. Edit. Grijalbo, España
Vigotsky, L. (1996). *Pensamiento y Lenguaje.* Trad. José Itzigsohn. 2ª edición, Ediciones Quinto Sol, México

INTERVALOS DE CONFIANZA, DESARROLLO HISTÓRICO E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Eusebio Olivo[1], Carmen Batanero[2]
[1]Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey. México
[2]Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada
eusebio.olivo@itesm.mx, batanero@ugr.es
Reporte de Investigación

Resumen

En este trabajo analizamos el desarrollo histórico de la evolución de las ideas relacionadas con la estimación, que culminan con el concepto intervalos de confianza, con la finalidad de identificar algunos de sus campos de problemas, así como dificultades de tipo epistemológico que puedan repetirse en el aprendizaje de los alumnos. Finalizamos con unas conclusiones para mejorar la enseñanza del tema.

Palabras Clave: Intervalos de confianza; Origen histórico; Probabilidades Inversas; Probabilidad Fiducial; Intervalos de Credibilidad; Implicaciones didácticas

Introducción

El intervalo de confianza es un tema estudiado en todos los cursos de estadística universitarios e incluso en la educación secundaria. Por ejemplo, en España, en M.E.C. (2004), se introduce dentro del tema de *estimación* en el Bachillerato de Ciencias Sociales.

Por otro lado, las investigaciones psicológicas y las didácticas han avisado acerca de errores en la inferencia estadística, sobre todo en la interpretación del contraste de hipótesis (Morrison y Henkel, 1970; Vallecillos, 1994, 1999; Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Batanero, 2000; Díaz y de la Fuente, 2004). Al mismo tiempo, investigadores de prestigio en la comunidad científica, sugieren el uso de los intervalos de confianza para complementar los contrastes de hipótesis y mejorar de este modo los errores denunciados en la práctica de la inferencia estadística (e.g. Davies, 1998; Clark, 2004).

Este cambio metodológico, requiere asegurar que las dificultades sobre los tests de hipótesis no se repiten –o al menos no con tanta intensidad- en los intervalos de confianza, tema donde la investigación didáctica es todavía incipiente. Algunos trabajos vinculados son los de Cumming, William y Fidler (2004), relacionado con errores que cometen los investigadores y Behar (2001) y Terán (2006), quienes inician el estudio de los errores de los estudiantes, relacionados sobre todo con la interpretación del coeficiente de confianza y de los extremos del intervalo.

La indagación del origen histórico del intervalo de confianza, nos permitirá identificar algunos de sus campos de problemas, que es uno de los elementos considerados en el marco teórico en el cual nos basamos; el modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002). Este trabajo está inscrito en un estudio más amplio que tiene como objetivo general analizar el significado presentado sobre los Intervalos de Confianza en los libros de texto utilizados en la formación de ingenieros en México. Más específicamente, y utilizando el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) propuesto por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, 2003), en ese estudio presentamos un análisis y clasificación de los *elementos de significado* de la noción de intervalo de confianza en dicho contexto. Dicho estudio se apoya en el análisis del significado actual del concepto y su evolución histórica, así como en el marco teórico citado y revisión bibliográfica de investigaciones previas. Los resultados obtenidos serán la base de la posterior construcción de un cuestionario de evaluación de los significados personales que asignan los estudiantes a este objeto matemático y servirán también para fundamentar futuras propuestas de enseñanza.

El enfoque teórico denominado “enfoque ontosemiótico” (EOS) de la cognición matemática proporciona una perspectiva pragmática – antropológica sobre el conocimiento matemático que puede complementar y enriquecer el análisis que hacemos de la evolución histórica del término. El EOS propone tres dimensiones en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: epistemológica, cognitiva e instruccional. Cada una de ellas se aborda con herramientas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998); teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006).En ese estudio nos ocupamos principalmente de la dimensión epistemológica.

El punto de partida del EOS es una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática de resolución de problemas: socialmente compartida, lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, este triple carácter de la matemática así como la génesis personal e institucional del conocimiento matemático.

En lo que sigue presentamos el análisis del significado actual del intervalo de confianza, y un estudio histórico de la evolución del concepto, como primer paso para continuar las investigaciones anteriores y analizar los posibles errores de aprendizaje de los estudiantes. El análisis conceptual que realizamos de los intervalos de confianza es desde un punto de vista estructural, esto es, teniendo en cuenta los elementos conceptuales y procedimentales puestos en juego en nuestro objeto de estudio, que el estudiante ha de comprender de antemano para abordar su estudio, lo que le dota de complejidad semiótica.

Complejidad del significado del intervalo de confianza

El intervalo de confianza se puede considerar como un concepto y como un procedimiento. Considerado como concepto, y en el contexto de estimar un parámetro poblacional, un intervalo de confianza es un rango de valores (calculado a partir de los datos de una muestra) en el cual podría encontrarse el verdadero valor del parámetro, junto con un coeficiente de confianza que indica el porcentaje de muestras tomadas en las mismas condiciones, en las cuales el intervalo cubriría el verdadero valor del parámetro. Como procedimiento, da una regla general de construcción de dicho rango de valores a partir de un estadístico calculado en los datos de la muestra, para el parámetro correspondiente. La idea general de intervalo de confianza se particulariza dependiendo del parámetro a estimar (media, proporción, varianza, etc.) y según las condiciones (tipo de distribución, qué se conoce de la misma, etc.).

La descripción resumida e intuitiva anterior se desarrolla en el mapa conceptual representado en la figura 1, donde observamos la complejidad del concepto, que se apoya en muchos otros y donde los mismos conceptos asociados aparecen a diferentes niveles. Por ejemplo, la idea de distribución aparece relacionada con la variable aleatoria (distribución de la población), con la muestra (distribución estadística de datos) y con el muestreo (distribución muestral del estadístico).

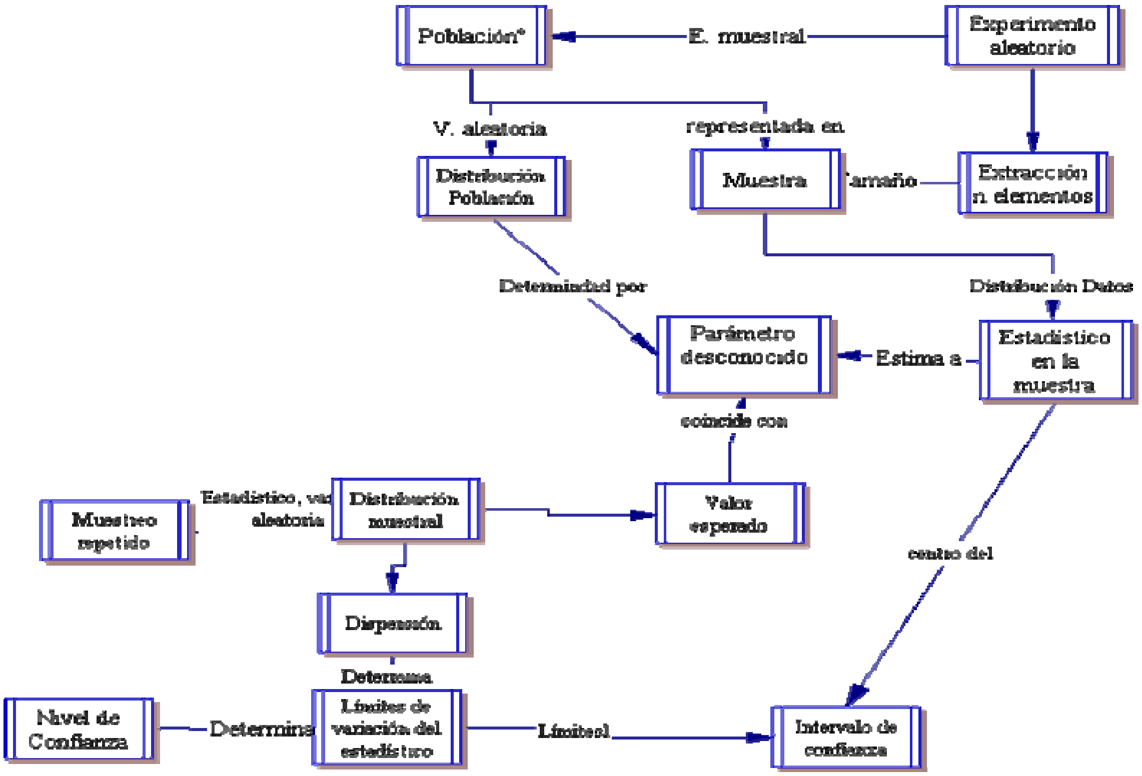


Figura 1. Mapa conceptual del Intervalo de Confianza

Origen histórico

La estimación estadística, hasta el siglo XX, se basaba fundamentalmente en el método de mínimos cuadrados debido a Gauss y el método de desviación mínima absoluta ideado por Laplace, que eran usados generalmente para estimar parámetros en modelos lineales (Rao, 1992, p.36). Desde el punto de vista de la filosofía de la ciencia, el problema de la estimación se relaciona con la inferencia inductiva, es decir aquella forma de razonamiento según la cual la verdad de las premisas no comporta necesariamente la de la conclusión, y en términos estadísticos, como las argumentaciones de la muestra hacia la población de la cual, se extrajo dicha muestra (Vallecillos, 1994).

Matemáticamente, el problema de la estimación, podemos plantearlo de distintas maneras. Una de ellas es asumir un fenómeno aleatorio que viene caracterizado por una distribución de probabilidad, que depende de uno o varios parámetros, supuestos *constantes*. Al no ser posible recolectar los datos de toda la población, hemos de conformarnos con una muestra aleatoria, de la misma población. El problema formulado es dar un valor aproximado del parámetro (o parámetros) a partir de los datos observados del estadístico (o estadísticos) en la muestra.

Es decir, siendo $X_1, X_2, ..., X_n$ un sistema de n variables aleatorias, cuyos valores particulares pueden ser obtenidos a través de muestras aleatorias. Como la ley de probabilidad de estas variables

$$P(x_1, x_2, ..., x_n \mid \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$$

para $x_1, x_2, ..., x_n$ valores de las n variables respectivamente, dependen de k parámetros desconocidos, se trata de estimar estos parámetros haciendo uso en este proceso de los valores observados $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ del sistema de n variables aleatorias.

Probabilidadades inversas

Thomas Bayes (1763), en un ensayo póstumo, propone una respuesta al problema de encontrar la probabilidad de que un efecto ocurrido sea debido a una causa dada, tomando como punto de partida las probabilidades a priori, de las posibles causas,
De este modo, plantea el uso de la probabilidad matemática para justificar la inferencia inductiva. Como veremos, el Teorema de Bayes constituye el primer esfuerzo de solución del problema de la estimación por intervalos, aunque considerando que los parámetros $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$ son *variables aleatorias,* caracterizados por una distribución a priori de probabilidad que se actualiza mediante el producto por las verosimilitudes. (Rivadulla 1991). El desarrollo es como sigue

Si en una serie de experimentos un suceso ha aparecido *p* veces y *q* veces el suceso contrario, la posibilidad w de que la probabilidad buscada para el suceso se encuentre entre x y X viene dada por la siguiente expresión:

$$W = \frac{\int_x^X x^P (1-x)^q \, dx}{\int_0^1 x^P (1-x)^q \, dx}$$

Puesto que Bayes considera el parámetro como variable aleatoria (al igual que hace hoy día la escuela Bayesiana), al dar la probabilidad de que el parámetro se encuentre entre ciertos valores, en realidad está dando un avance hacia la construcción de *intervalos de credibilidad*. Estos intervalos se utilizan en inferencia bayesiana y en ellos se consideran los extremos como fijos y el parámetro como aleatorio. Los *intervalos bayesianos de credibilidad* serían entonces anteriores históricamente a los *intervalos de confianza.*

Laplace rescata el teorema de Bayes y desarrolla él mismo algunas de sus consecuencias. En "*Mémoire sur la Probabilité des Causes par les événements"* publicado por Laplance en 1774 encontramos también un análisis Bayesiano, donde se ocupa de la inferencia, con la finalidad de determinar la proporción desconocida (parámetro de una distribución binomial) (Hald, 1998, pp. 23-4). Asimismo, en la sección V del "Mémoire sur la Probabilité des Causes par les événements", Laplace se enfoca en la estimación del valor medio a partir de tres observaciones. Motivado por una nota publicada por J. Bernoulli III que indicaba que el problema de estimación de la media era de considerable interés para los astrónomos. La importancia que guarda el artículo citado de Laplace radica en que sienta las bases de la teoría de la decisión moderna y de la inferencia bayesiana (Stigler 1986). En 1818 Laplace establece la primera formulación del problema de *estimación puntual.*

Tanto Laplace como, posteriormente Gauss (hacia 1887) contemplan un valor desconocido del parámetro θ y un cierto número de sus mediciones x_i todas sujetas a un error aleatorio. También los dos contemplan la formulación de lo que se llama la "función pérdida" $L(\hat{\theta},\theta)$.Esta función representa el error que el estadístico asumirá por adoptar a $\hat{\theta}$ como estimador de θ. Laplace usó el valor absoluto de la diferencia $L_L(\hat{\theta},\theta)=\left|\hat{\theta}-\theta\right|$, mientras que Gauss prefirió su cuadrado $L_G(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$. De ahí resultó la teoría de mínimos cuadrados. (Neyman, 1976).

Probabilidad fiducial

Fisher (1930) introduce la idea de *intervalos fiduciarios,* para tratar de salvar las dificultades que surgen al intentar usar el Teorema de Bayes cuando no existe información a priori sobre los parámetros. Fisher, que siempre se preocupó por mantener una visión frecuencial de la probabilidad desarrolló el método llamado "fiducial" basado en la función de verosimilitud (Rouanet, 1998). La probabilidad fiducial trata de expresar la frecuencia con que el valor verdadero de un parámetro toma un valor determinado; a partir de los datos observados, por ejemplo que la probabilidad de que cierto parámetro poblacional sea menor que un valor dado es del 5%.

Por ejemplo, para una población normal con σ conocida, tomemos el valor dado $\mu_1=\overline{X}-1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Lo que el enunciado de probabilidad fiducial afirma es que $P(\mu<\mu_1)=0.05$, lo cual se interpreta como que en el 5 % de todas las posibles muestras, μ no alcanzarán el valor μ_1.

En el caso general, si $\hat{\theta}$ es un estadístico y P la probabilidad de que $\hat{\theta}$ sea menor que un valor específico, entonces tenemos una relación de la forma

$$P=F(\hat{\theta},\theta)$$

Si ahora damos a P cualquier valor particular tal como 0.95, tenemos una relación entre el estadístico $\hat{\theta}$ y el parámetro θ, tal que $\hat{\theta}$ es el valor en el percentil 95 % correspondiente a un θ dado, esta relación implica que en el 5% de las muestras $\hat{\theta}$ excederá al percentil 95% correspondiente al valor real de θ de la población de la cual fue extraída. Fisher (1930) llama a esa relación el *"5% fiducial del valor de θ"* correspondiente a un valor dado de $\hat{\theta}$. Si $\hat{\theta}$ se incrementa con θ para todos los valores posibles, debemos expresar la relación diciendo que "*el verdadero valor de θ será menor que el 5% fiducial del valor correspondiente al valor observado de $\hat{\theta}$ en exactamente 5 intentos de 100*" (Fisher, 1930).

Este método trata de evitar el uso de probabilidades a priori para el parámetro (como la estadística frecuencial), pero produce probabilidades a posteriori del parámetro, dados los datos (como la inferencia bayesiana). Rouanet (1998) indica que en algunos casos las distribuciones fiduciales de Fisher coinciden con las distribuciones bayesianas a posteriori, de modo que se podría considerar que Fisher fue un bayesiano, sin saberlo. Sería el caso de distribución inicial no informativa, es decir, cuando se suponen equiprobables a priori todos los valores de los parámetros.

Para Fisher uno de los objetivos de la investigación empírica debe ser la búsqueda de la máxima verosimilitud. Esta idea da lugar a los métodos de estimación de máxima verosimilitud. (Rivadulla, 1991). Fisher con sus constructos de verosimilitud y probabilidad fiducial trata de sustituir la probabilidad subjetiva, aportada por el método bayesiano, por una medida de creencia racional, basada únicamente en los datos observados, pero continúa argumentando sobre una población tomando como punto de partida los datos recolectados en el muestreo.

Las teorías de la probabilidad fiducial de Fisher permiten calcular valores de verosimilitud sobre los parámetros, pero no proporcionan una distribución de probabilidad acerca de parámetros desconocidos, por lo que no resultaron exitosos. Aún así, hoy día la idea de verosimilitud y máxima verosimilitud es una de las principales en estimación. Por otro lado los métodos bayesianos no informativos se apoyan en el método fiducial de Fisher (Lecoutre, 1999).

Experimentos repetidos e intervalos de confianza

Jerzy Neyman (1894-1981) inicia la teoría moderna de *intervalos de confianza* e introduce el término en 1934 con su artículo, "On the two different aspects of the representative method", arrancando con ello la teoría estadística de la estimación del programa Neyman- Pearson. Pero su trabajo más importante sobre el problema de la estimación estadística es "Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability " de 1937.
Neyman (1934) muestra que el problema de la estimación puede ser resuelto con base en la teoría frecuentista de probabilidades y sin requerir algún conocimiento de probabilidades a priori. Para ello sugiere que la solución del problema de estimación consiste en determinar ciertos intervalos, que denomina intervalos de confianza, en los cuales debemos asumir están contenidos los valores de los parámetros; la probabilidad de un error será igual o menor que $1-\varepsilon$ donde ε es cualquier número $0<\varepsilon<1$, escogido anticipadamente.

El número ε lo llama coeficiente de confianza. La forma de interpretar esta probabilidad es la siguiente: al estimar el valor del parámetro θ, el experimentador o estadístico tendrá éxito, en *aproximadamente un porcentaje de muestras tomadas de la misma población* a la larga. Es decir, en el intervalo de confianza el parámetro se considera constante, pero los extremos son variables aleatorias que cambian de muestra a muestra. Su método, busca la máxima exactitud posible del resultado al determinar las estimaciones inferior y superior, obtenidas al sumar y restar al estimador la desviación respecto al estimador.

Neyman (1941) intenta probar que no hay relación entre la teoría fiducial y la teoría de los intervalos de confianza, aunque pasa por serias dudas provocadas, entre otras cosas, por la identidad numérica de los límites fiduciales de Fisher con los límites de sus intervalos de confianza. También, para el caso de distribución a priori no informativa los intervalos de credibilidad y confianza coinciden (sus límites) en muchos casos, aunque la interpretación, como hemos visto es muy diferente (Lecoutre, 1999).

Algunas conclusiones

El problema de estimación por intervalos se resolvió históricamente por tres métodos diferentes: los intervalos de credibilidad (solución bayesiana), los intervalos fiduciales de Fisher y los intervalos de confianza de Neyman.

Las teorías de la probabilidad fiducial de Fisher permiten calcular valores de verosimilitud sobre los parámetros, pero no proporcionan una distribución de probabilidad acerca de parámetros desconocidos, por lo que no resultaron exitosos. Aún así, hoy día la idea de verosimilitud y máxima verosimilitud es una de las principales en estimación. Por otro lado los métodos bayesianos no informativos se apoyan en el método fiducial de Fisher (Lecoutre, 1999).

Respecto a la diferencia entre intervalos de credibilidad y de confianza, incluso aunque en algunos casos coincida numéricamente el valor de sus extremos, la historia nos revela que tienen una interpretación muy diferentes:

- En el intervalo de confianza el parámetro es constante y los extremos del intervalo son aleatorios. El nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$ significa para la teoría Neyman- Pearson que a la larga el $(1-\alpha)100\%$ de los intervalos (calculados en muestras sucesivas de la misma población) incluyen el valor verdadero del parámetro θ que se desea estimar. La probabilidad $(1-\alpha)100\%$ es una probabilidad frecuencial y se refiere al experimento supuesto de repetir indefinidamente la toma de muestras de la misma población y calcular los intervalos.

- La teoría Bayesiana considera θ como una variable aleatoria, con una distribución inicial de probabilidad. El teorema de Bayes actualiza esta distribución inicial pasando a una distribución final de probabilidades para el parámetro. No se plantea el contexto de repetición. Los límites de un intervalo de credibilidad de $(1-\alpha)100\%$ se consideran fijos y la probabilidad es una probabilidad subjetiva y epistémica, porque se refiere sólo al experimento concreto.

De hecho (Cumming, William y Fidler, 2004; Belia, Fidler y Cumming, 2005; Schenker y Gentleman, 2001), muchos investigadores dan una interpretación bayesiana a los intervalos de confianza, es decir, piensan que el intervalo de confianza da la probabilidad de que el verdadero valor del parámetro θ está contenido dentro de los límites de confianza (esta probabilidad la daría el intervalo de credibilidad).

Puesto que el estudio histórico muestra que el desarrollo de las ideas bayesianas sobre estimación fue bastante anterior al de las ideas frecuenciales (aunque no se llegaron a imponer en la práctica por la dificultad filosófica de tener que trabajar con probabilidades subjetivas), una hipótesis es que el método Bayesiano podría ser más intuitivo que el frecuencial. Esto es también sugerido por algunos investigadores (Lecoutre, 1999) aunque habría que analizarlo con más detalle en nuevas investigaciones.

Reconocimientos

Agradecimiento a la Fundación Carolina (Madrid), Tec de Monterrey, Campus Monterrey y Proyecto SEJ2004-00789, MEC (Madrid).

Referencias Bibliográficas

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Journal of Mathematics Thinking and Learning,* 2(1-2), 75-98.
Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística.* Ph. D. Universidad Politécnica de Cataluña.
Clark, M. L. (2004). Los valores p y los intervalos de confianza, ¿en qué confiar?. *Revista Panamericana de Salud Pública,* 15(5), 295-296.
Cumming, G. y Fidler, F. (2005). Interval estimates for statistical communication: problems and possible solutions. Trabajo presentado en la *IASE/ISI Satellite Conference on Communication of Statistics.* Sydney: IASE.
Cumming, G. y Finch, S. (2005). Inference by eye: Confidence intervals, and how to read pictures of data. *American Psychologist, 60,170-180*
Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers` understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, 3, 299-311
Davies, H. (1998). What are confidence intervals? On line: [http://www.evidence-based-medicine.co.uk]
Díaz, C. y de la Fuente, I. (2004). Controversias en el uso de la inferencia en la investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento*. Volumen especial 2004, 161-167.
Fisher, R. A. (1930). Inverse Probability. *Proceedings of the Cambridge Philosofical Society,* 26, 528-535.
Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3), 237-284.
Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14(3), 325-355.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
Godino, J. D., Batanero, C. y Roa R. (2005). Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies in Mathematics,* 60(1), 3-36
Harlow, L. L.; Mulaik, S. A. y Steiger, J. H. (1997). *What if there were no significance tests?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
Hald, A. (1998). *A history of mathematical statistics from 1750 to 1930*. New York: John Wiley.
Lecoutre, B. (1999). Beyond the significance test controversy: Prime time for Bayes? *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 205 – 208). Helsinki, Finland: International Statistical Institute.

Morrison, D.E. y Henkel, R.E. (1970). *The significance test controversy*. Chicago: Aldine.

Neyman, J. (1937). Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. *Philos. Trans. Royal Society of London*, series A, 767.

Neyman, J. (1941). Fiducial argument and the theory of confidence intervals. *Biométrica* 32, 2, 128-150.

Neyman, J. (1976). The emergence of mathematical statistics En D. B. Owen (Ed.), *On the history of statistics and probability* (pp. 149-189). New York: Marcel Dekker, Inc.

Rao, C. R. (1992). R. A. Fisher: The founder of modern statistics. *Statistical Science*, 7, 1, 34-48

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e Inferencia científica.* Barcelona: Anthropos.

Rouanet, H. (1998a). Statistics for researchers. En H. Rouanet et al. (Eds.), *New ways in statistical methodology* (pp. 1 – 28). Berna: Peter Lang.

Stigler, S. M. (1986). *The history of statistics the measurement of uncertainty before 1900*. Prensa de Belknap: Universidad de Harvard.

Terán, T. (2005). Elements of meaning and its role in the interaction with a computacional program. Trabajo contribuido en A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS 7.* Salvador (Bahia), Brasil: IASE. CD ROM.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testing hyphoteses. Ponencia invitada. *Proceedings of the 52nd Session of the ISI* (Vol.2, 2001-204). The Netherland:ISI.

EXPLORACIONES DE LA RELACIÓN $f - f'$ EN CONTEXTOS

Ángeles Alejandra Ordóñez, Gabriela Buendía
Universidad Autónoma de Chiapas, México
anlejandra@hotmail.com, gbuendia@hotmail.com
Reporte de investigación.

Resumen
Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas, en un contexto analítico queda en demostrar la veracidad de la proposición "Si es f periódica con periodo a y diferenciable, entonces f' es periódica" usando las definiciones de derivada y de función periódica; sin embargo al trabajar esta relación en distintos contextos, podemos hallar argumentos y herramientas situacionales que la resignifican. Este tránsito entre contextos es posible a través del ejercicio intencional de prácticas asociadas al reconocimiento significativo de lo periódico. En este trabajo reportamos algunos resultados al enfrentarse con esta relación para funciones periódicas en distintos escenarios.

Palabras Claves.
Lo periódico, $f - f'$, comportamiento, gráfico, físico, analítico

Introducción

Uno de los principales resultados de la investigación en Socioepistemología es la formulación de epistemologías de prácticas en las que la imagen de un conocimiento matemático puro y limpio se deja de lado, para dar espacio a un conocimiento no lineal en el que las argumentaciones y herramientas lo reconstruyan continuamente (Cordero, 2003). Con base en la Socioepistemología de lo periódico propuesta por Buendía (2004), en este trabajo abordamos el aspecto periódico en la relación de una función y sus derivadas.

Consideramos que la problemática que surge respecto a dicha relación se debe al privilegio de los aspectos analíticos tanto para las funciones como para su aspecto periódico. Esto lo podemos ver en el manejo del discurso matemático escolar (DME) al considerar únicamente cuestiones como la siguiente (Spivak, 1993) para hablar de la relación *f-f '* para funciones periódicas :

- Supóngase que f es diferenciable y periódica, con periodo a (es decir, $f(x) = f(x+a)$ para todo x). Pruebe que f' es también periódica.
- Hallar una función f tal que f no sea periódica, pero f' sí

Tradicionalmente, un fenómeno periódico en el DME es caracterizado fundamentalmente por el carácter repetitivo del mismo lo que significa que sigue cualquier tipo de repetición, sin que se logre hacer una distinción entre "se repite y cómo se repite". Coincidimos con Buendía (2005) al marcar una diferencia entre *lo periódico* – término con el cual tomaremos como todo aquello en un sentido institucional, cultural e histórico referente a la periodicidad – y *la periodicidad* en el

[1] Esta investigación se realizó con el apoyo del proyecto estudio del desarrollo del saber matematico en un marco socioepistemologico (PROMEP/103.5/04/2927 Folio UACHIS-PTC-39)

sentido utilitario que le ha impregnado el sistema didáctico, el cual se reduce a aplicar o comprobar una fórmula. Así lo periódico es un atributo que caracteriza no sólo la repetición que presenta un objeto matemático, sino la forma como dicha repetición se presenta de tal manera que en el análisis de un objeto matemático es relevante no sólo que se repita, sino cómo se repite.

La socioepistemología de lo periódico

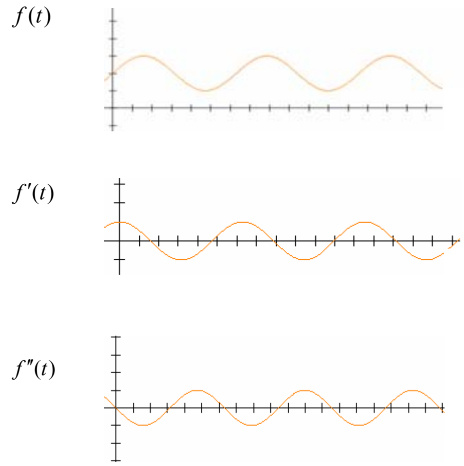
La socioepistemología de lo periódico propuesta señala a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento significativo de lo periódico y da cuenta de que en un contexto de funciones y su representación gráfica, la predicción es un argumento en la construcción de lo periódico. Más que fijar el foco de atención en fórmulas, definiciones u objetos matemáticos aislados, la práctica de predicción propone relaciones y da coherencia al conocimiento matemático a lo largo de todo el sistema educativo; en particular, al comportamiento periódico. La práctica de predecir se fundamenta en la idea de describir el estado posterior de la gráfica de un movimiento basándose en el estado actual lo que equivale a utilizar la información de la cual se dispone. Para ello, la identificación y uso de una unidad de análisis es la herramienta que se desarrolla en este marco de predicción intencional e influye, a su vez, en el desarrollo de la práctica.

A través de esta herramienta es que se puede ver una articulación entre los diferentes tópicos periódicos que se desarrollan en la currícula escolar. En particular, nos centraremos en el nivel medio superior y superior en el que se desarrolla el concepto de derivada. Esto nos permitirá analizar lo periódico en la relación de una función y sus derivadas.

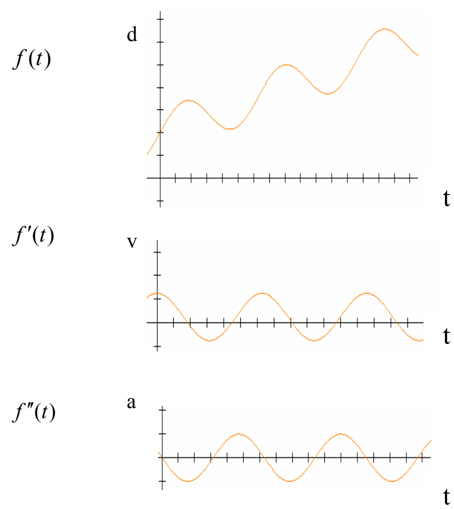
Lo periódico en la relación f-f'

En un contexto analítico lo periódico en la relación de una función y sus derivadas queda en demostrar la veracidad de la proposición "Si es f periódica con periodo a y diferenciable, entonces f' es periódica" usando, en una matemática formal, las definiciones de derivada y de función periódica o bien, podría bastar con un ejemplo que cumpla con las condiciones pedidas.
Proponemos trabajar esta relación en el tránsito de los contextos analítico, gráfico y físico debido a que la periodicidad es un concepto que transita entre diferentes disciplinas escolares. También por esta razón, suponemos, no puede quedar relegado al aspecto analítico; ya que el comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un movimiento descrito desde un contexto físico y grafico.
En Buendía (2004) se da evidencia de la problemática acerca de lo periódico: *La asociación de lo periódico con cualquier tipo de repetición.* Propone gráficas que representan movimientos, en las que la repetición es una característica presente en todas y se manifiesta a través de tres comportamientos distintos. Esta distinción se basa en la diferenciación entre el comportamiento presente en el tiempo (eje x) y aquél que se presenta en la distancia (eje y).
Tomemos movimientos junto con su representación grafica, considerando tanto movimientos periódicos como no periódicos

Si un movimiento es modelado por una función periódica de tal manera que describa la gráfica *f*, este movimiento es alejarse y acercarse de un punto de referencia una distancia constante todo el tiempo. Al analizar las graficas de $f'(x)$ y $f''(x)$ se tiene que son periódicas, es decir, que la velocidad y la aceleración del objeto en movimiento también son periódicas.

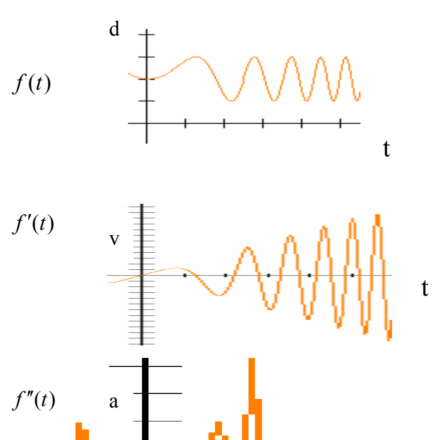


Consideremos un movimiento modelado a través de la función *f* cuya gráfica es la que se muestra; se observa que el movimiento tiene un patrón uniforme en el tiempo; es un ir y venir pero el objeto se aleja cada vez del punto de referencia: se aleja dos unidades y regresa una. A pesar de ello se observa que la velocidad y la aceleración son periódicas.



Al relacionar la gráfica de una función con la de su derivada, podemos observar que si la primitiva guarda al menos una repetición uniforme en el eje *X*, su derivada sí será periódica. Buendía (2004) ha dado evidencia de que ese mismo tipo de primitivas son las que, de manera más común, suelen ser clasificadas como periódicas. Pudiera ser que al referirse al comportamiento periódico de una función con esta característica (repetición uniforme en el dominio, patrón de crecimiento en el eje *y*), en realidad se está calificando la periodicidad de la derivada: el patrón de crecimiento en el eje *y* se anula al derivarse.

En este ejemplo se tiene un movimiento donde la distancia recorrida en el ir y venir es la misma, pero en un tiempo cada vez más corto y esto lleva a que la velocidad y la aceleración vayan variando. Aquí, sólo hay una regularidad en el comportamiento presente en el eje *Y* y vemos que tanto en la velocidad como en la aceleración no hay ningún comportamiento periódico.



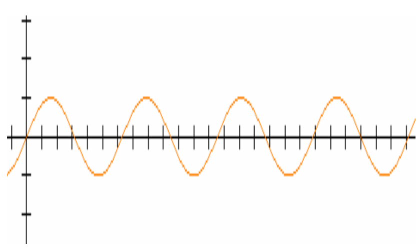
Al considerar la posición del objeto durante el movimiento modelado por una función y saber que la derivada nos representa la velocidad del objeto, nos hemos preguntado ¿qué implicaciones tiene para el movimiento y su velocidad, si esta función es periódica? ¿Cómo es tal movimiento? ¿Cómo es el comportamiento de su velocidad y su aceleración?

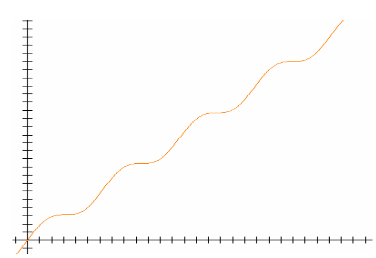
En el estado del arte de nuestro trabajo en las investigaciones que hemos revisado de la relación $f - f'$, no hemos encontrado una que la estudia en el marco de las funciones con comportamientos periódicos. Cantoral y Mirón (2000), analiza la naturaleza del aprendizaje de los estudiantes en relación *f-f'* a la luz de los graficadores. Dolores (1996), se dirige a incorporar fenómenos relacionados a la variación (problemas de física) y González (1999) propone que la derivada adquiere significado cuando se analizan las derivadas sucesivas. Creemos que estudiar lo periódico en la relación $f - f'$ nos brindará marcos de referencia para obtener significados funcionales en ella.

Metodología
Hemos realizado algunas exploraciones de la relación $f - f'$ en contextos periódicos haciendo las siguientes actividades, cada una con distintos participantes, en algunos casos con profesores y en otros con estudiantes.

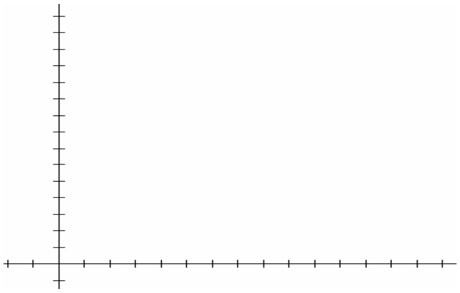
Actividad A
Conteste las siguientes preguntas.
¿Si f es periódica entonces, f' es periódica? Argumente su respuesta.
¿Si f' periódica entonces, f es periódica? Argumente su respuesta.
Suponiendo f y f' periódicas ¿Existe alguna relación entre el periodo de cada una?

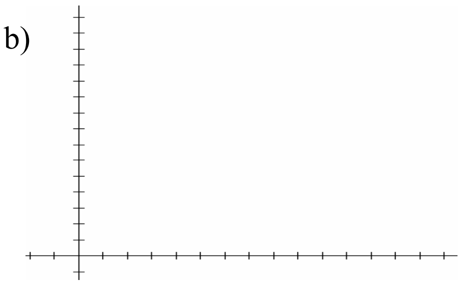
Actividad B.
1. Dadas las siguientes graficas de funciones, diga en cada caso si es periódica

a)


b)


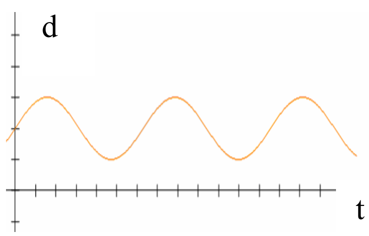
2. Obtenga la grafica de la función derivada de cada una de las funciones anteriores.

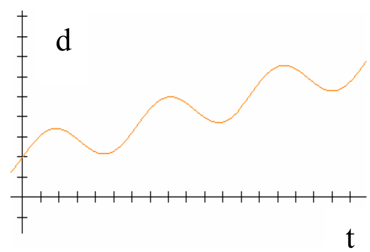
a) 

b) 

¿Son periódicas? ¿Por qué?

Actividad C
Considere las siguientes graficas de funciones tiempo-distancia y supongamos representan el movimiento de una persona.

a) 

b) 

1¿Cómo es el movimiento de la persona en cada una de ellas?
2. Describa el comportamiento de la velocidad de la persona en cada una
3. Los movimientos, ¿son periódicos? ¿Por qué?
4. La velocidad en cada uno de los movimientos ¿es periódica?. ¿Por qué?
5. ¿Qué puede decir de la aceleración en cada movimiento?

Discusión

Se presentan a continuación algunas respuestas de estas primeras exploraciones.

Actividad A
Ingeniero Zavala (civil). Para él ambas implicaciones son verdaderas, argumenta que las únicas funciones periódicas son las trigonométricas.
Ingeniero Carlos Victoria (civil): la implicación $f.periódica \Rightarrow f'\,periódica$ duda en que se cumpla pero no dio un argumento del porqué; intentó dar ejemplos pero no resultaron, los ejemplos proporcionados se limitaban a funciones trigonométricas. Con respecto a

$f'\,periódica \Rightarrow f.periódica$ dice que es verdadera dando como ejemplos la funciones seno y coseno y obteniendo la antiderivada.

Actividad B
Ingeniero Zavala. Realiza la gráfica de la función seno y concluye que es periódica debido a que encuentra el intervalo de repetición. Luego obtiene la gráfica de la derivada, sabiendo que la derivada del seno es la función coseno y por tanto es una función periódica.
Ingeniero Carlos Victoria: Grafica la función seno y acuerda que es una función periódica, realiza la grafica de la derivada usando que en los máximos de la función la derivada es cero y en los puntos de inflexión la derivada es máxima o mínima.

Luego, les pedimos obtener la gráfica de la función derivada y, nuevamente, analizar el cumplimiento o no de la propiedad periódica. En ambos casos, algunos con criterios gráficos, hallan la gráfica de la derivada, y concluyen que ambas son periódicas.

Ingeniero Zavala. Para la gráfica de la función $f(x) = x + senx$, grafica el seno y la rota de tal manera que el eje X coincida con la recta $f(x) = x$. Es periódica porque puede encontrar el periodo debido que es el periodo lo que indica la repetición. Para la gráfica de la derivada, primero deriva la función $f(x) = x + senx$ y obtiene la función $f(x) = \cos x$ y por tanto es periódica.
Ingeniero Carlos Victoria Para la función $f(x) = x + senx$ dice que es como el seno pero no sobre el eje X sino sobre la recta $y = x$ y siempre es creciente y esta función no es periódica. Para la derivada, identifica que en los puntos de inflexión la derivada alcanza máximo o mínimo y como es creciente siempre es positiva y ésta sí es periódica.

En este contexto gráfico, podemos hacer evidente que el comportamiento de una función tiene dos componentes: el comportamiento en el eje X y el comportamiento en el eje Y; esta distinción es fundamental para distinguir entre algo periódico y algo que “no es verdaderamente periódico” (Buendía, 2004). Es importante hacer notar que es común que la gráfica de la función $f(x) = x + senx$ se le clasifique como periódica o, al menos con cierta periodicidad, ya que guarda una repetición regular en el eje X. Y esa es una característica que los estudiantes utilizan para obtener la gráfica de la derivada, manteniendo así su comportamiento periódico.
Encontramos que al enfrentar la propiedad periódica desde un contexto gráfico, se considera el comportamiento de repetición puntual y sin analizar, de manera global, el comportamiento presente en cada una de las coordenadas. En ocasiones, el análisis se centra en la indagación del comportamiento de las abscisas dejando sin sentido el resto: se hace énfasis únicamente en el comportamiento de la variable independiente dejando de lado el de la imagen. Estos elementos de corte gráfico también nos permiten sostener la importancia de estudiar los aspectos periódicos en la relación de una función y sus derivadas.

Actividad C
Esta actividad fue respondida por Anselmo Martines Ruiz; estudiante de 8° semestre de la carrera de ingeniería civil y sus respuestas fueron:
1. El movimiento es variable en *b)* y constante en *a)*.

2. En *b)* hay una variación lineal y en *a)* la variación es constante.
3. *a)* si, *b)* semiperiódico Porque en *a)* repetimos un movimiento igual en determinado tiempo que varia, y en *b)* por que se mantiene un cambio constante en la distancia.
4. No en *b)*, si en *a*) Porque al calcular la velocidad en del individuo y hacer la gráfica veremos que no es periódico en b), si lo es en a)
5. En b) es constante y en b) se considera variable por la forma de la velocidad.

Este estudiante no describe cómo se está moviendo la persona, sin embargo determina que en la gráfica *a)* hay cierto intervalo de tiempo que al ir transcurriendo; el movimiento es el mismo. Y en *b)* observa que hay un aumento constante en la distancia, razón por la cual no puede ser periódico.

Nuestro trabajo propone realizar un estudio de la implicación "f *periódica* $\Rightarrow f'$ *periódica*" en el tránsito de los contextos analítico, gráfico y físico debido a que la periodicidad es un concepto que transita entre diferentes disciplinas escolares, y dar cuenta, que no puede quedar relegada al aspecto analítico o asociada a una sola función. El comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un movimiento descrito desde un contexto físico y gráfico.

Conclusiones

Al considerar exclusivamente un contexto analítico, una función se cataloga como periódica o no periódica haciendo uso de la definición; esto es: una función es periódica si cumple la igualdad $f(x) = f(x+p)$ para todo x que pertenezca al dominio, sin aludir al uso de herramientas de corte social que reconocen al individuo en un determinado contexto sociocultural – no exclusivamente matemático. Estas herramientas de corte social, como el comportamiento de una función, enriquecen la argumentación alrededor de lo periódico y se resignifica este aspecto de lo periódico de las funciones.

Creemos que para estudiar lo periódico en la relación de una función y sus derivadas, desde el tránsito de los contextos analítico, gráfico y físico importa comprender la interacción entre los procedimientos usados y las características particulares de los objetos con que se trabajan. Nuestro trabajado de investigación abordará el aspecto periódico en la relación de una función y sus derivadas en un marco de prácticas sociales y dando evidencia que no puede quedar relegado al aspecto analítico ya que el comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas dará argumentos para analizar y caracterizar un movimiento desde un contexto físico y gráfico.

Referencias Bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales.* Tesis de doctorado publicada. México: Cinvestav.
Buendía, G. (2005). Qué enseñar en Matemáticas: una visión socioepistemológica. *Revista Pakbal*. Facultad de Ingeniería Unach. Año 3, Nov. 2004. Chiapas, México.

Buendía, G. (2005). Prácticas Sociales y Argumentos: El Caso de lo Periódico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a. Vol. 18, (pp. 451-456). México.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a. Vol. 16, Tomo 1, (pp.73-78). México.

Dolores, C. (1997). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. En *Resúmenes de la 11ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp 19. Universidad Michoacán de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Michoacán.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN.

Cantoral, R, y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 3 (3), 265-292

Spivak, M. (1993). *Calculus.* Editorial Reverté 2ª edición. México.

EL USO SOCIAL DE LAS GRÁFICAS Y LA ESCUELA

Edilberto Meza Fitz
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Universidad Autónoma de Guerrero
mezafitz@hotmail.com
Reporte de Investigación

Resumen

En el presente trabajo nuestro objetivo es analizar los trabajos que utilizaron gráficas cartesianas en su desarrollo y determinar si aportan elementos que permitan evidenciar las formas en que las gráficas viven y son movilizadas en las interacciones sociales como argumentos o herramienta para intervenir en el entorno. Para ello nos dimos a la tarea de realizar un análisis de los resultados de investigaciones reportadas, que guardan alguna relación con las gráficas cartesianas. Pusimos un mayor énfasis en el uso que se dio a las gráficas en el desarrollo de las investigaciones. En una parte significativa de los trabajos revisados la caracterización de los usos de las gráficas, se realiza en contextos ligados al ámbito escolar, lo cual refuerza nuestra postura en el sentido de que el tema es abordado privilegiando ese ámbito. En estos trabajos se enfoca la atención en lo cognitivo, en las dificultades, los errores, las concepciones alternativas, su papel en la comprensión de los conceptos o las propiedades matemáticas y en el desarrollo cognitivo del pensamiento. El panorama descrito evidencia que la búsqueda de las formas en que las gráficas viven y son movilizadas en las interacciones sociales como argumentos o herramienta para intervenir en el entorno, es aún un campo fértil en el que podemos continuar nuestra investigación.

Palabras clave: uso social, gráficas, ámbito extraescolar, comunidades de profesionales.

Introducción

El uso que las gráficas tienen en contextos extraescolares obedece a relaciones sustancialmente diferentes a las compartidas en el contrato social escolar. Asumimos que tales relaciones son omitidas o ignoradas en la construcción escolar del conocimiento matemático relacionado con el tema de las gráficas cartesianas. Como lo señala Cantoral (2003), esa situación es contradictoria ya que un saber cultural que se encuentre desligado de su génesis constituye un producto descontextualizado y despersonalizado. Es a partir de esta modalidad que los conocimientos ingresan en los programas escolares.

Es común que la enseñanza se organice descomponiendo un saber en su modalidad cultural, en pequeños trozos aislados y luego organizar su ingestión por los alumnos en periodos breves y bien delimitados según secuencias determinadas sobre la base del análisis del propio saber; hacerlo así, no atribuye importancia al contexto específico, a la situación específica, donde los conocimientos se adquieren, ni a su significación y valor funcional, durante su adquisición. (op. cit. 2003). En ese sentido, nuestro interés es analizar los trabajos que utilizaron gráficas cartesianas en su desarrollo y determinar si aportan elementos que permitan evidenciar las formas en que las gráficas viven y son movilizadas en las interacciones sociales como argumentos o

herramienta para intervenir en el entorno. Visto de otra manera, queremos saber si se han resuelto cuestionamientos como ¿Cuál es el uso de las gráficas en contextos extraescolares? ¿Cuáles son los saberes matemáticos que se ponen en juego al interpretar las gráficas en esos contextos? ¿Cómo son los procesos didácticos asociados al uso de las gráficas en contextos extraescolares?
En el análisis realizado no hay una discusión de los marcos teóricos utilizados, porque buscamos más bien la forma en que los autores utilizaron las gráficas, pudiendo detectar algunas tendencias, mismas que se mencionan en el siguiente apartado.

Metodología

Nos dimos a la tarea de realizar un análisis de los resultados de investigaciones reportadas, que guardan alguna relación con las gráficas cartesianas. Pusimos un mayor énfasis en el uso que se dio a las gráficas en el desarrollo de las investigaciones. Dolores (2006) plantea una clasificación del uso de las gráficas: como auxiliares didácticos, como medios para comunicar información y como medios para el desarrollo del pensamiento. No encontramos en esta exploración el uso de las gráficas como recurso didáctico, pues está más directamente vinculado con prácticas docentes tradicionales. Tampoco encontramos trabajos en los que se estudie a las gráficas como medios para comunicar o difundir información, pues esta función está más directamente ligada a los medios masivos de comunicación. En los trabajos encontrados, aún cuando pudieran encajar en alguno de los tres usos dados a las gráficas propuestos por Dolores (2006), preferimos crear tres apartados; el primero con aquellas aportaciones que consideramos generales; uno más que consideró a aquellos en cuyo desarrollo se utilizó algún recurso tecnológico y un tercero que reúne los trabajos cuyos objetivos los ubican dentro de lo que consideramos la matemática funcional.

Aspectos generales en relación con las gráficas

En principio, asumimos como Roth (2003), que la graficación consiste de un arreglo de prácticas significativas que incluyen hablar, escribir, gesticular, y dibujar. Esas prácticas están codesplegadas tanto como cualquiera en forma individual y sólo puede ser entendida dentro de la red de prácticas, esto es, en sus relaciones con las otras prácticas.

Así, al hablar de graficación, están implícitas las acciones de construcción e interpretación de la gráfica. Por ello debe tomarse en cuenta que detrás de la habilidad para interpretar gráficas, está el desarrollo del razonamiento covariacional, definida según Carlson, (2002) como la actividad cognitiva que involucra la coordinación de dos cantidades variando, entendiendo la forma en la cual cambian una en relación a la otra. En la dirección de la construcción e interpretación de las gráficas Dolores (1999) estableció que del estudio de situaciones de variación elemental, se obtienen los conceptos de variable y función; la conexión entre sus expresiones analíticas y sus representaciones gráficas se utilizan para manipular los procesos de cambio, pues es muy difícil realizar operaciones con los cambios si no se cuenta con una fórmula matemática y una gráfica que ayude a representar el comportamiento de esos cambios. No obstante Vicario (2002) advierte que existe una gran diversidad de concepciones en los estudiantes de bachillerato sobre el significado de variable, sobre todo cuando ésta se les presenta en el plano gráfico, en este contexto detectó una serie de concepciones alternativas muestran su escasa comprensión de este concepto.

Por su parte Ochoviet, Olave, y Testa (2006), reportaron un estudio de caso realizado con estudiantes de 16-17 años en relación a sus concepciones sobre la gráfica de una función lineal de dominio discreto. A los estudiantes se les propusieron tres actividades relacionadas con la función $f(x) = 2x$, a resolver individualmente, pudiendo ayudarse utilizando una tabla de valores. Se les solicitó graficar la función $f(x) = 2x$: a) Cunado la variable x toma todos los valores reales; b) Si la variable x toma solamente valores naturales; y. c) Cuando la variable x toma solamente valores enteros. Los estudiantes mostraron resistencia a aceptar una gráfica de puntos como la gráfica de una función. Pensamos que en esto incide el universo de gráficas con las que los estudiantes han tomado mayor contacto en sus actividades escolares: “las de trazo continuo”.

Las gráficas como instrumento en el desarrollo del pensamiento

Para facilitar el análisis, agrupamos los trabajos que corresponden a esta categoría en tres apartados.

1. En el trabajo que se describe a continuación, la autora utilizó las gráficas como un instrumento para poner en juego habilidades del pensamiento que permiten construir conocimiento.

Buendía (2004), aborda la escasa coherencia que hay entre la existencia y aplicabilidad de una definición matemática de periodicidad, componente esencial de la estructura matemática, con lo que sucede y se interpreta acerca de lo periódico en ambientes escolares. Esto se refleja en el manejo que hacen los estudiantes de los comportamientos repetitivos, particularmente cuando interpretan movimientos a través de su representación gráfica. Para realizar el estudio, diseño tres secuencias con sus actividades, que al finalizarlas, le permitieron establecer lo que ella llamó tres momentos: 1. Las gráficas que representan movimientos repetitivos son periódicas. 2. Existen diferentes maneras en las que una gráfica puede repetirse, y. 3. La periodicidad es una propiedad que califica cierto tipo de repetición. Asegura haber identificado que a través de los procedimientos se percibe cierta privilegiación de contextos de tal modo que se pueden catalogar en tres categorías: analíticos, como el uso de expresiones algebraicas; visuales, que se basan fundamentalmente en el manejo de la gráfica; y aritméticos, como las que utilizan tabulaciones.

2. Las investigaciones descritas a continuación, utilizaron las gráficas y otros sistemas de representación.

En su trabajo Benítez (2004), buscaba proporcionar al estudiante diversas situaciones para explorar el contenido de las representaciones gráfica, numérica y algebraica. La actividad se realizó en el contexto de un curso de álgebra. Como parte de sus resultados, reportó que los equipos realizaron interpretaciones de tipo global y puntual a la información que se identificó en las representaciones gráfica, numérica y algebraica. La interpretación global se utilizó en la representación gráfica, para explorar el contenido del trazo a través de tratamientos cualitativos, concediendo la identificación de variables y características visuales. La interpretación global de las variables visuales otorgó establecer conexiones con las variables categóricas de la representación algebraica. La interpretación puntual se aplicó a la representación gráfica, a través de tratamientos cuantitativos, cuya información se basó en la elección de parejas ordenadas para verificar el tipo de trazo que se exploraba. Los equipos no establecieron conexiones con las representaciones numérica y algebraica, sino con la misma representación gráfica para determinar el tipo de trazo.

En su trabajo, Acosta (2005), a través del análisis del lenguaje de las representaciones tanto analíticas como gráficas, y su tránsito entre ellas; persigue la caracterización del estilo de pensamiento global y local, de estudiantes y profesores del nivel medio superior y superior, a partir de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval. Para ello se les pidió que dijeran y escribieran todo lo que se les ocurriera para obtener la solución de la desigualdad $x^2+x-2\geq 0$. Los resultados le llevaron a establecer que los estudiantes de precálculo logran transitar de una representación a otra, en los caos de problemas rutinarios, aunque generalmente de la representación algebraica a la gráfica y verbal y no a la inversa. Pero en general muestran una carencia de vinculación coherente de una representación a otra. Resultados similares fueron obtenidos por Castrejón (2001).

Por su parte, Acuña (2001), realizó un trabajo que se orientó a investigar el uso y las concepciones asociadas a la comparación de orden entre las coordenadas de puntos sobre el plano para entender mejor el proceso de graficación en el plano cartesiano, desde un punto de vista semiótico en el sentido de Duval, en los estudiantes de bachillerato. De acuerdo con la autora, para algunos estudiantes el hecho de decidir en donde se sitúan las coordenadas mayores no necesariamente implicó tener la certeza de la posición que ocupan las menores, lo que le dota de una visión fragmentada de la ubicación sobre el plano. Observamos la preeminencia que se da al manejo del plano cartesiano en términos de la descripción de parejas de números negativos y positivos más que en el manejo de un espacio bidimensional orientado.

Ramírez, Oktaç y García (2006), seleccionaron a cinco estudiantes de nivel superior y les pidieron que realizaran dos actividades, para conocer con mayor profundidad las causas de sus dificultades en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. La primera actividad consistió en graficar las posibles posiciones que tienen dos rectas en el plano. En la segunda actividad les pidieron: a) Representa dos rectas que tengan un solo punto en común en el plano. b) Representa un par de rectas que no tengan puntos en común, y c) Representa un par de rectas que tengan más de un punto en común. En la primera actividad, todos los estudiantes identificaron el caso de rectas paralelas, mientras que solo uno identificó el caso de dos rectas equivalentes. En la representación gráfica de dos rectas intersecadas en un punto, 4 estudiantes muestran que para ellos cuando las rectas son perpendiculares, esto se considera como una posición diferente a los demás casos donde el ángulo de intersección puede ser cualquier valor distinto de 90°. Esto puede deberse a la importancia que se le acuerda al caso perpendicular en cualquier representación visual en la enseñanza. También muestra que las decisiones de los estudiantes se basan en la percepción visual (una característica del pensamiento geométrico) y no 100% en las propiedades de los objetos matemáticos. En el caso de la segunda actividad, ningún estudiante tuvo dificultad con los primeros dos incisos. Cuatro de los cinco estudiantes no lograron representar las rectas que tengan más de un punto en común.

3. Los trabajos que se anotan a continuación tienen en común la interpretación de gráficas como parte del estudio.

En particular, Roth (2003), realizó investigaciones sobre graficación entre científicos que son responsables del diseño de ambientes de aprendizaje para estudiantes en general y para estudiantes de ciencias en particular y tuvo que ver con un entendimiento de cómo individuos altamente educados construyen significados a partir de las gráficas. En una actividad que consistió en interpretar tres gráficas del tipo que aparecen en los textos de introducción a la ecología en la universidad, la frecuencia de respuestas correctas fue más alta entre los científicos que entre los profesores universitarios. Sin embargo, pudo observarse que los científicos distaron mucho de la perfección cuando llegaban a dar más que una lectura literal y arribar a la interpretación estándar de las gráficas. Los datos también mostraban una diferencia interesante entre los científicos que trabajaban en universidades y aquellos que trabajaban en el sector público; los científicos que trabajaban en las universidades o al nivel de preparatoria tendrían a ser más exitosos que sus colegas no maestros. También encontró evidencia de que para algunos lectores, las gráficas pueden servir como soporte importante para las actividades del estudiante, para la negociación de significado, y para la cohesión de los temas de la conversación sobre y para las tareas que ellos están realizando.

Por otra parte, una serie de investigaciones enfocadas al análisis de las concepciones alternativas que permanecen sin cambios en los estudiantes, aún después de cursar las materias relacionadas con esos temas, se basaron en pedir a los participantes la construcción de gráficas a partir de enunciados verbales. En el primer caso, Mevarech y Kramarsky (1997), realizaron un estudio con estudiantes israelíes de entre 12 y 14 años, cuando se les pidió que representaran gráficamente las situaciones descritas en diferentes enunciados, los cuales teóricamente producirían las gráficas de una recta con pendiente positiva, una recta constante, una curva cóncava hacia abajo y una recta de pendiente negativa. Entre los resultados obtenidos destacan los hallazgos de tres categorías de concepciones alternativas manejadas por los estudiantes a) la construcción de una gráfica completa con un solo punto; b) la construcción de una serie de gráficas, cada una representando un factor de los datos relevantes; c) la conservación de la forma de una función creciente bajo todas las condiciones. Por otro lado, encontraron que previo a la instrucción formal sobre graficación, aproximadamente la cuarta parte de los estudiantes de octavo grado podían hacer correctamente la transformación de la descripción verbal a la representación gráfica y muchos más (aproximadamente el 60% de los estudiantes) pudieron representar correctamente al menos un tipo de función (op. cit. 1997).

En esa dirección, Dolores (2003), encontró que en relación a las funciones que se estudian en el bachillerato, una parte significativa de estudiantes considera que una función tiene imágenes positivas si su gráfica tiene abscisas positivas, sin importar el signo de sus ordenadas; tales ideas análogas se hallaron para las funciones con imágenes negativas. Así suponen que una función tiene puntos estacionarios donde la gráfica corta al eje x, o bien cuando sus abcisas son equivalentes a cero. También se identificó una relación fuerte de concomitancia, por un lado, entre la función creciente y con imágenes positivas, por otro, entre la función decreciente y con imágenes negativas.

En un estudio de menor alcance, Abraján (2006), exploró las lecturas e interpretaciones que hicieron los estudiantes del nivel medio superior y superior, de las graficas que se utilizan en los medios de comunicación y en la escuela. Consideró para el estudio, las cuatro acciones para el estudio de las funciones, sugeridas por Dolores (1999); tales acciones se detonan en los estudiantes con las preguntas: ¿Qué cambia? ¿Cuánto cambia? ¿Cómo cambia? Y solicitándoles una visión global y precisa de la gráfica y su comportamiento. Encontró que la mayoría de los alumnos solo pueden realizar la lectura de la información que se les presenta en forma explicita, tal como el título, las magnitudes que representan las variables o la descripción de valores para puntos específicos de la gráfica. En el mejor de los casos, hicieron comentarios en torno a puntos específicos o pequeños intervalos utilizando términos como: más alto, más bajo, sube, baja, incremento, decrecimiento, permanece estable.

De manera similar, Dolores et al. (2002), al estudiar las concepciones alternativas que se presentan en la lectura de las gráficas cartesianas de coordenadas tiempo-distancia, con estudiantes del 3er. grado de Secundaria; del 3er. grado de Preparatoria y universitarios. También en profesores de matemáticas en secundaria y de física del nivel preparatoria. La atención se centró la velocidad media, velocidad instantánea y la trayectoria de cuerpos en movimiento. Encontraron que los estudiantes conciben la condición mayor velocidad media, como asociada a: a) la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o con el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura; b) con el segmento rectilíneo de mayor longitud de la gráfica (cuando está compuesta de varios segmentos de recta); c) el segmento rectilíneo horizontal al eje de t (quizá interpretando la gráfica como el corte transversal de una carretera que cuando es plana el automóvil debe desplazarse con mayor velocidad); d) con el segmento de recta de mayor pendiente. Esta última concepción es más visible en los estudiantes universitarios, en tanto que la proclividad a manifestar las restantes es más marcada en los de secundaria. En cuanto a los profesores, las tendencias manifestadas por los estudiantes se conservan, sólo que hay preferencia por el intervalo de las ordenadas de mayor altura. Más de la mitad de los profesores de preparatoria la asociaron con el segmento de recta de mayor pendiente.

Por su parte, Dolores y Guerrero (2004), reportan los resultados de una investigación que exploró las concepciones alternativas de profesores y estudiantes de bachillerato acerca del comportamiento variacional de funciones. Para ello diseñaron un cuestionario en el que se usaron los sistemas de representación verbal, gráfico y analítico. Encontraron que cierto sector de los profesores y estudiantes asocian consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva (expresadas en forma verbal escrita) con las gráficas correspondientes, mientras que al pedirles que asocien las condiciones creciente y negativa (bajo las mismas condiciones) por un lado, y decreciente y negativa por otro, los porcentajes disminuyen sensiblemente. Se detectó gran proclividad tanto en los profesores como en los estudiantes a considerar que, gráficamente se cumple que $f(x_0)$ es equivalente con $f''(x_0)$, en virtud de que los profesores y los estudiantes, construyeron gráficas en las que hacen manifiesto que $f(x_o) = 0$ y $f''(x_o) = 0$ son la misma expresión, esto al menos en el tratamiento gráfico. En referencia al proceso de reversibilidad, el paso de la gráfica de $f'(x)$ a $f(x)$, es escaso en profesores y prácticamente nulo para los estudiantes. Al plantear a los profesores construir $f(x)$ dada $f''(x)$ esbozan rectas tangentes en algunos puntos de la gráfica de $f''(x)$. Solo un profesor construyó una gráfica aceptable.

Graficación con tecnología

Algunos autores utilizaron software educativo o sensores para generar gráficas. Por ejemplo, Suárez, Carrillo y López (2005), desarrollaron un trabajo cuyo propósito era ampliar la gama de situaciones de movimiento a modelar y el análisis de las gráficas asociadas. Propusieron a los participantes (profesores de matemáticas), que realizaran movimientos ante un aparato sensor, entonces contrastaron dos gráficas; una generada a partir de la concepciones propias sobre el movimiento y la otra generada por una calculadora a través de los datos obtenidos por el sensor.

Utilizaron las siguientes situaciones del movimiento: a) Movimiento pendular. b) Movimiento de personas, y c) Movimiento oscilatorio amortiguado. Afirman que pudieron observar que la confrontación entre las gráficas produce una ruptura entre las primeras concepciones de los participantes y las que se generan en la simulación del movimiento. En la descripción de movimientos con velocidad variable, los participantes describen el movimiento solo con funciones lineales, contrastada con la que se genera con el sensor. Situaciones en la que los participantes proponen una gráfica continua y la calculadora genera una discontinua.

Gregory et al. (2006) realizaron una investigación sobre el proceso de construcción del conocimiento matemático, específicamente, del estudio de funciones reales, utilizando un software educacional como recurso metodológico. Fueron introducidas algunas funciones con actividades realizadas con el software educativo; en general, los cuestionarios fueron resueltos con éxito por los participantes; aún cuando reclamaron falta de tiempo para realizar las actividades. Los resultados indican que el aprendizaje efectivo de la matemática puede ser alcanzada por medio de la combinación entre actividades especialmente elaboradas para que sean desarrolladas durante el curso, el uso del software como herramienta de apoyo y la coordinación de ese trabajo por el profesor investigador durante los encuentros.

Por su parte, Suárez (2006) trata de establecer el uso que se le da a las gráficas para describir el cambio y la variación, pues según ella, a partir del estudio del uso de las gráficas avanzaremos al establecimiento teórico de un binomio graficación-modelación por un lado, y por otro daremos cuenta, en términos metodológicos para establecer la modelación escolar en el sistema didáctico.
Identificó tres usos: a) la construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables, a partir de la relación algebraica; b) la graficación por operaciones con gráficas; y. c) la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología. Éste último uso de las gráficas tuvo especial atención en este trabajo, con la pretensión de caracterizarlo. En él, el estudiante realiza distintos movimientos ante un sensor y obtiene gráficas que están relacionadas con los movimientos que realiza; de la relación que el estudiante encuentre entre el movimiento y las gráficas se generarán los significados en este uso de las gráficas.

En el mismo sentido, Torres y Suárez (2005), realizaron un trabajo en el que se da cuenta de los aprendizajes que logran los estudiantes del nivel bachillerato al trabajar con un problema en una situación real de movimiento, empleando sensores y calculadora graficadora. Se plantearon la hipótesis siguiente: “la tecnología genera un nuevo uso de las gráficas”. Para corroborarla, diseñaron una situación de aprendizaje que consistió en pedir a los participantes hacer la gráfica de una persona que en nueve minutos, se aleja 500 metros de un punto de partida, para luego regresar; en el trayecto se detiene cuatro minutos. En sus resultados destacan que los estudiantes hacen una descripción gráfica de la posición y la velocidad, discutiendo sobre la inclinación de las rectas, antes y después de realizar la simulación y obtener las gráficas con la tecnología. Apuntan algunos logros de los estudiantes al trabajar la situación de modelación del movimiento y que pudieron transitar con facilidad entre las diferentes representaciones: simulación, verbal, tabular, gráfica y algebraica, antes y después de usar la tecnología.

Las gráficas en la matemática funcional

Existen trabajos que abordan el tema del uso de las gráficas, haciendo énfasis en el aspecto funcional del tema, tal es el caso de Cordero (2005), que considerando varias investigaciones sobre la graficación en el discurso matemático escolar, destaca como es que el estudio de usos y el desarrollo de prácticas de la graficación responde a la demanda de hacer funcional el conocimiento matemático. Afirma haber encontrado evidencia sobre prácticas argumentativas gráficas en diversas situaciones, donde son resignificadas al debatir entre la función y la forma de la graficación. Establece las situaciones didácticas donde la graficación juega el papel de argumentación matemática: a) Graficación-Modelación-Predicción, relacionando estas prácticas, donde el comportamiento de las curvas o funciones anticipa tendencias de comportamiento tanto local como globalmente. b) Situación de la linealidad del polinomio. La función de la gráfica en la situación consiste en generar el comportamiento tendencial determinado por la parte lineal del polinomio, lo que viene siendo la resignificación de la derivada. c) El uso de las gráficas en Oresme. Oresme se propuso representar a través de figuras geométricas (rectángulos y triángulos) el modo en que las cosas varían. d) El uso de las gráficas en Euler. Euler nos ofrece un uso de las gráficas para determinar que las propiedades analíticas de las funciones son intrínsecas a las *curvas*, y. e) Uso de las gráficas en los libros de texto. Las gráficas en los libros de texto pasan por diferentes funcionamientos y formas.

Los usos descritos significan que la graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. En ese sentido, Flores (2005), realizó un estudio en el nivel básico, sobre el uso que se hace de las gráficas en el discurso matemático escolar a través de los libros de texto. La investigación pretendía comprender a la graficación como una práctica institucional que se desarrolla en el discurso matemático escolar y es reflejada en los libros de texto, pero no como una representación del concepto de función; a partir de analizar, en el discurso de los libros de texto del nivel básico (la primaria y la secundaria), el uso que se le da a las gráficas con respecto a sus funcionamientos y sus formas. Los resultados consistieron en haber encontrado un marco de referencia que da cuenta del uso de las gráficas en el discurso matemático escolar, el cual rompe la centración en los conceptos matemáticos, como la única fuente para reconstruir el conocimiento matemático, y abre otro camino más amplio, donde las prácticas sociales son los elementos medulares para tal reconstrucción del conocimiento matemático. El análisis proveyó de tres momentos: el del uso del síntoma de la gráfica de la función, el del uso de la gráfica de la función y el del uso de la curva.

De manera análoga, Cen (2006), realizó una investigación que consideró como problemática específica el papel que juegan las prácticas institucionales en la construcción del conocimiento escolar, caracterizando el uso de las gráficas en los textos de matemáticas del bachillerato del Instituto Politécnico Nacional. La autora estableció diferentes usos de las gráficas: a) distribución de puntos, b) comportamiento geométrico, c) análisis de la curva, d) cálculo de área y de volumen, y. e) análisis de información.

Por su parte, Rosado (2004) realizó una investigación asumiendo que las gráficas son argumentaciones que permiten construir significados, buscando la resignificación de la derivada. Con preguntas como ¿Qué le pasa a una función cuadrática cuando se le suma una recta? esperaba que los estudiantes observaran el comportamiento de las gráficas resultantes al sumarle a la función cuadrática diferentes rectas, a través de describir la posición de las gráficas de las funciones resultantes con respecto a los comportamientos de las rectas sumadas. Como resultado presentó un marco argumentativo donde los significados, procedimientos y los procesos y objetos del comportamiento tendencial de las gráficas y de las funciones resignifican la derivada en las funciones polinómicas a través de tres momentos en los que se debate, el funcionamiento y la forma del comportamiento lineal intrínseco al polinomio.

Conclusiones

Este ejercicio nos ha permitido acercarnos al planteamiento inicial que ha motivado un proyecto de más amplio alcance y que intenta realizar aportes a la problemática que surge del tratamiento del tema el uso de las gráficas exclusivamente en ámbitos escolares.

Ese recurso tan poderoso en distintas actividades de nuestras sociedades, se ve limitado por la falta de habilidad para su utilización por parte del ciudadano con escolaridad promedio. Por ello se hizo necesaria esta revisión, porque de acuerdo con Roth (2003), podemos entender mucho sobre prácticas matemáticas tal como la graficación, cuando sabemos cómo y por qué razones estas son empleadas en el contexto particular en que las podemos observar.

En una parte significativa de los trabajos revisados la caracterización de los usos de las gráficas, se realiza en contextos ligados al ámbito escolar, lo cual refuerza nuestra postura en el sentido de que el tema es abordado privilegiando ese ámbito. En estos trabajos se enfoca la atención en lo cognitivo, en las dificultades, los errores, las concepciones alternativas, su papel en la comprensión de los conceptos o las propiedades matemáticas y en el desarrollo cognitivo del pensamiento. En trabajos como Cordero (2005) se empieza a estudiar la graficación en el discurso matemático escolar sobre la base que da la matemática funcional y en el desarrollo de las prácticas sociales, contrario a las investigaciones que parten de premisas que colocan a la matemática formal en el papel central, estas investigaciones centran la atención en los usos y desarrollo de prácticas de la graficación y de este modo han posibilitado un acercamiento a la matemática funcional. No obstante en esta línea de investigación es aún incipiente. El panorama descrito evidencia que la búsqueda de las formas en que las gráficas viven y son movilizadas en las interacciones sociales como argumentos o herramienta para intervenir en el entorno, es aún un campo fértil en el que podemos continuar nuestra investigación.

Referencias Bibliográficas

Abraján, N. (2006). *Lectura e interpretación de gráficas. El caso de los estudiantes del nivel medio superior y superior*. Tesis de maestría no publicada, CIMATE-UAGro, Chilpancingo, Gro. México.

Acosta, J. A. (2005). Tránsito entre representaciones en matemáticas ¿Pensamiento Global o Local? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 18, 5-10.

Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4 (3), 203-217.

Benítez, A. A. (2004). Construcción de la expresión algebraica de una gráfica, considerando la interpretación global de las representaciones gráfica, numérica y algebraica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 17, 455-460.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de* *prácticas sociales* (*Un estudio socioepistemológico*). Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav-IPN, México, D. F., México.

Cantoral, R. Farfán, R. Cordero, F. Alanís, J. Rodríguez, R. Garza, A. (2003). Desarrollo del pensamiento matemático. México, D.F, México. Trillas.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). *Applying Covariational Reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 33, No. 5, pp. 352–378

Castrejón, R. (2001). Análisis del comportamiento de variación de funciones, en estudiantes del nivel superior: dos estudios exploratorios. Tesis de Licenciatura no publicada. Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Cen, L. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D. F., México.

Cordero, F. (2005) La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 18, 477-482.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 19, 824-830.

Dolores, C. (1999). La introducción a la derivada a través de la variación. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V. México D.F.

Dolores, C. (2003). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 7(3), 195—218.

Dolores, C. Alarcón, G. Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 5 (3), 225-250.

Dolores, C. Guerrero, L. A. (2004). Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores y estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 17, 101-107.

Dolores, C. (2006). Usos de las graficas y sus repercusiones en el aprendizaje de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 20. En prensa

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D. F., México.

Gregory, A. R. Voos, D. Leyser, M. (2006). Estudio de las funciones con el uso de software educacional (traducción libre del portugués). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 19, 864-868.

Mevarech R. & Kramarky B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics.* 32(3), 229—263.

Ochoviet, C. Olave, M. Testa, Y. (2006). Concepciones de los estudiantes acerca de la gráfica de una función lineal de dominio discreto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 19, 485-490.

Ramírez, M. C. Oktaç, A. García, C. (2006). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 19, 413-418.

Rosado, M. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en* *la aproximación socioepistemológica. Una Caracterización del Contrato Didáctico en un Escenario Virtual*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D. F., México.

Roth, W-M. (2003) *Toward an Anthrophology of graphing. Semiotic and Activity-Theoretic Perspectivas.* Netherlands. Kluwe Academic Publishers.

Suárez, L. (2006). *El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico.* Memoria predoctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México, D. F., México.

Suárez, L. Carrillo, C. López, J. I. (2005). Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 18, 405-410.

Torres, A. Suárez, L. (2005) La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 18, 645-650.

Vicario M. (2002). *Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes del nivel medio y superior.* Tesis de Licenciatura no publicada. Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

NEWTON Y LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES NUMÉRICAS: DESARROLLO HISTÓRICO.

Flor M. Rodríguez[4], Modesto Sierra[5].
Universidad de Salamanca.
flor_r@usal.es
Reporte de Investigación.

Resumen
En 1711 Isaac Newton publicó su libro *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* en el cual se plasman algunos de sus hallazgos en relación a la solución de ecuaciones numéricas. Para resolver estas últimas, Newton aplicó un algoritmo ya conocido desde los babilónicos, algoritmo que en la actualidad es parte del programa de estudios de carreras como arquitectura, biología, ingeniería, matemáticas, etc. Nosotros discutiremos algunos aspectos del trabajo de Newton desde la perspectiva de la investigación histórica, la cual ha reportado ser en algunos casos, favorable en el ámbito didáctico. Asimismo, se reportan algunos resultados arrojados del análisis epistemológico del método para aproximar a la solución de ecuaciones numéricas dado en el *De Analysi.*
Palabras clave: Investigación histórica, método iterativo, ecuaciones no lineales.

Abstract
In 1711 Isaac Newton published his book *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* which contains some of his research works about the solution of numerical equations. For resolving it, Newton applied an algorithm already known since babylonian's time, an algorithm that in present time is part of the studies program of professions like architecture, biology, engineer, mathematics, etc. We will treat some aspects of the Newton's work from the historical research perspective, which has reported to be, in some cases, favorable in didactic ambit. Likewise, we report some evidences from the epistemological analysis of the method for being close to solution of numerical equations given in *De Analysi*.
Keywords: Historical research, iterative method, non linear equations.

Introducción

La *investigación histórica* ha reflejado ser competente en el ámbito de la didáctica de la matemática y así, desde esta perspectiva, afrontamos el tema de la evolución de un saber, con el propósito de vislumbrar el pasado y el presente para ampliar nuestro entendimiento al espacio educativo. De acuerdo con Cantoral et al. (2000), dado que la matemática se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento. Asimismo este proceso de incorporación de los saberes al sistema didáctico plantea una serie de problemas tanto teóricos como prácticos, que precisan de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados. En este sentido, consideramos necesario realizar un estudio de la génesis del concepto

[4] Con el apoyo del programa ALβAN, programa de becas de alto nivel de la Unión Europea para América Latina, n° de identificación E03D21720MX.
[5] Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Facultad de Educación. Universidad de Salamanca.

a estudiar, a saber, los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, de tal forma que indaguemos sobre las relaciones entre el desarrollo científico y social y el desarrollo de los contenidos de la enseñanza, obteniendo con ello una visión más amplia del tema tanto en su contexto histórico como en el contemporáneo.

El estudio histórico de la evolución de un concepto puede incrementar su conocimiento tanto teórico como práctico. Pajus (2000) señala que el contenido cultural de las matemáticas no sólo se reduce a sus aspectos técnicos. En concreto, los textos y referencias históricas permiten comprender la interacción entre los problemas matemáticos y la construcción de conceptos que surgen a partir de su resolución.

Hemos de asumir que el análisis histórico cumple varias funciones: en primer lugar se considera que las nociones matemáticas no se desarrollan de manera aislada, sino conectadas unas con otras; en segundo lugar, muestra el contexto de problemas en los que han aparecido los conceptos y; en tercer lugar nos hace comprender que el desarrollo no ha sido lineal. (Sierra et al, 2002). Esto nos lleva a mirar los cambios que sufre un saber a través de la historia de tal forma que nos aproximemos a su evolución hasta el momento actual.

De este modo, realizamos un análisis de libros históricos[6] que, siguiendo a la literatura, son clave en la evolución de nuestro tema de estudio. No obstante, en este escrito únicamente presentamos un avance de investigación, enfocando nuestra atención en la obra de Newton (1711), *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, ya que sin duda este autor es protagonista en el tema de la resolución de ecuaciones.

Metodología

Las etapas que hemos considerado se corresponden con la metodología de investigación histórica, nuestro plan de trabajo consiste en seguir el método[7] sugerido por Ruiz Berrio (1976) el cual está determinado por las siguientes fases: *Heurística*.- localización y clasificación de los documentos; *Crítica*.- crítica externa: determinación de la autenticidad de las fuentes según sus características formales, las circunstancias en que ha llegado a ser posible su conocimiento y el modo de llegar a las manos del investigador / crítica interna: comprensión e interpretación del contenido de los documentos; *Hermenéutica*.- interpretación histórica de los datos; *Exposición*.- explicaciones convenientes del trabajo histórico.

Los objetivos particulares que nos planteamos para el análisis de la obra de Newton fueron:
a) identificar y clasificar, los diferentes tratamientos didácticos de su método iterativo para encontrar raíces de ecuaciones y,

[6] "Resultados de la actividad humana que por su destino o su propia existencia u otras circunstancias, son particularmente adecuados para informar sobre los hechos históricos y para comprobarlos". González (2002)

[7] Sierra (1989) en relación al método, expresa que el primer paso debe ser la selección del tema y reducir cuanto se pueda los límites de la investigación, escogiendo conjuntos históricos representativos. Una vez hecho esto, se debe de programar el desarrollo de la investigación, realizando un estado de la cuestión, sondear los fondos documentales existentes, elaborar una hipótesis o campo de hipótesis como punto de partida, búsqueda exhaustiva de los documentos intentando buscar siempre fuentes primarias, realizar una crítica externa e interna de los documentos, estructuración definitiva del trabajo y finalmente las conclusiones.

b) analizar desde las dimensiones, epistemológica y socio-cultural el método iterativo que presenta.

Nuestra *hipótesis general* radica en que los procesos iterativos para la resolución de ecuaciones han evolucionado con base al tratamiento de la derivada a lo largo de la historia[8].
Ahora bien, con base en González (2002) hemos construido una herramienta de estudio definiendo unos campos generales de análisis como son la ficha de referencia de la obra, la contextualización y objetivos de la obra, los objetivos del autor, e intentamos clasificar el contenido según el tipo de proceso utilizado en la resolución de ecuaciones. Asimismo para cada campo hemos elegido unidades de análisis con el fin de ahondar en los detalles epistemológicos. A continuación mostramos las categorías para el análisis de libros históricos. (Ver Tabla 1)

<table>
<tr><th>Campo de análisis</th><th colspan="2">Unidades de análisis</th><th>Catego-rización</th><th>Descripción general de los propósitos</th></tr>
<tr><td>Ficha de referencia de la obra</td><td colspan="2">▪ Nombre del autor
▪ Fechas de nacimiento y fallecimiento del
▪ autor
▪ Primera edición
▪ Edición analizada
▪ Localización del manual utilizado</td><td></td><td>Nos permite enmarcar la obra en el momento en el que fue escrita.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Contexto y propósitos de la obra y del autor</td><td colspan="2">▪ Momento histórico y lugar en que fue
▪ escrita la obra</td><td>CP1</td><td rowspan="7">Contextualiza-ción y caracterización de la obra en función de los sucesos que influyeron para su para su divulgación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Contexto histórico-cultural de las matemáticas en general</td><td>CP2</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Formación del autor</td><td>CP3</td></tr>
<tr><td>▪ Estructura general del material</td><td>- Extensión y estructura del material
- Secuenciación de los contenidos de la obra
- Tipografía de la obra</td><td>CP4</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Objetivos generales de la obra</td><td>CP5</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Innovaciones introducidas por el material</td><td>CP6</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Otras obras publicadas</td><td>CP7</td></tr>
<tr><td>Tipo de proceso utilizado en la</td><td>▪ Geométrico (G)</td><td>- Ejemplos de problemas
- Tipos de expresiones utilizadas
- Conceptos</td><td>PG</td><td>Explicación del tratamiento didáctico que</td></tr>
</table>

[8] Hipótesis que tiene antecedentes en interrogantes del siguiente tipo: ¿Qué tipo de pensamiento matemático predominaba en los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, XIX en relación a los métodos de aproximación de ecuaciones?; ¿Qué tipo de problemas intentaban resolver los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, XIX en general?; ¿Cómo han variado los procesos iterativos para la resolución de ecuaciones al introducir las nuevas tecnologías en su enseñanza?; ¿Qué similitudes existen en los procesos iterativos plasmados en los libros de texto con los expuestos por las nuevas tecnologías?; ¿Hay conexiones entre los tratamientos geométrico, algebraico y numérico de los métodos iterativos?

		involucrados - Gráficas empleadas		
resolución de ecuaciones	▪ Algebraico (A)	- Ejemplos de problemas - Tipos de expresiones utilizadas - Conceptos involucrados	**PA**	en diferentes periodos se le dio a los procesos iterativos.
	▪ Numérico (N)	- Ejemplos de problemas - Tipos de expresiones utilizadas - Conceptos involucrados	**PN**	

Tabla 1. Categorías para el análisis de los libros históricos.

Resultados.

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas.

Autor	Isaac Newton
Fecha de nacimiento y fallecimiento del autor	1642/1643-1727.[9]
Título	*De analysi per eaquationes numero terminorum infinitas.*
Año, editorial y lugar de la primera edición.	1711, Ex officina Pearsoniana, Londres.
Año, editorial y lugar de la edición consultada	1711, Editado por SAEM THALES. RSME, España.
Localización del manual utilizado	Biblioteca General de la Universidad de Salamanca/Biblioteca personal.

Tabla 2. Ficha de referencia de la obra

El *De Analysi* como suele abreviarse, fue adquirido por William Jones en un lote de documentos de John Collins[10]. Jones (entonces presidente de la Royal Society) le pidió autorización a Newton para publicarlo, éste accedió e incluso le prestó el original para cotejar con el manuscrito de Collins. También autorizó publicar otros tratados, como son fragmentos de cartas que atañen a la relación entre cuadraturas[11] y series infinitas, dos de estos fragmentos corresponden a la *Epistolae prior* y *posterior*[12], los tratados *De cuadratura curvarum, Enumeratio linearum tertii ordinis* y *Methodus differentialis* (aplicación del método de diferencias finitas de Newton), a todo el compendió le llamó de *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias; cum*

[9] Nació el 24 de diciembre de 1642 y murió el 20 de marzo de 1727 según el calendario en uso en la época. Nació el 4 de enero de 1643 y murió el 31 de marzo de 1727 según el calendario gregoriano, el cual fue adoptado en Inglaterra hasta 1752.

[10] Copia manuscrita hecha por el mismo Collins.

[11] Cuadratura es la acción y efecto de cuadrar una figura geométrica, esto es, consiste en construir un cuadrado de área igual a la figura geométrica de la que se quiere hallar el área. En el contexto actual en matemáticas, significa integración.

[12] Cartas en las que Newton exponía a Leibniz parte del contenido del *De Analysi* y del *De Methodis* sobre desarrollos en serie. Se creó una gran disputa entre ellos a causa de quién era el autor del cálculo.

enumeratione linearum tertii ordinis, es decir, *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.*

El *De Analysi* es el primer tratado sobre cálculo infinitesimal que Newton hizo público, fue redactado en junio de 1669 y apareció publicado hasta 1711[13]. El tratado contiene *el método general del análisis enseñando cómo resolver ecuaciones finitas en infinitas* para resolver problemas referentes a cuadraturas. Básicamente pueden distinguirse cinco secciones, en las que muestra tres reglas con las cuales fundamenta su cálculo, es decir, el método de cuadraturas. A continuación se muestran dichas reglas tomadas del original.[14] (Tabla 3)

Curvarum Simplicium Quadratura. REGULA I. *Si* $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Areæ ABD.* *Res Exemplo patebit.* 1. Si x^2 $(= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc eſt, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABD. A 2. Si	Cuadratura de Curvas Simples Regla 1. Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, será $\frac{a}{n+m} x^{\frac{m+n}{n}}$ = área ABD
Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus. REGULA II. *Si valor ipſius y ex pluribus iſtiuſmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a ſingulis Terminis emanant.*	Cuadratura a partir de las simples de las compuestas. Regla 2. *Si el valor de y se compone de varios términos de este género, compondráse el área, asimismo, de las áreas que dimanan de los términos singulares.*[15]
Aliarum Omnium Quadratura. REGULA III. *Sin valor ipſius y, vel aliquis ejus Terminus ſit præcedentibus magis compoſitus, in Terminos Simpliciores reducendus eſt; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes ſolvunt; & ex iſtis Terminis quæſitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.*	Cuadratura de todas las demás. Regla 3. *Si no es que el valor de y o de alguno de sus términos sea más compuesto que los precedentes, que entonces ha de reducirse a términos más simples, operando en las letras de idéntico modo que en los números decimales los aritméticos dividen, extraen raíces o resuelven las ecuaciones afectadas, y de esos términos obtienes finalmente la superficie de la curva requerida mediante las reglas precedentes.*

Tabla 3. Reglas para la cuadratura

La tercera regla expresa cómo reducir fracciones, raíces y raíces afectadas[16] de ecuaciones en series convergentes, cuando la cuadratura no se pueda resolver en otra forma y, usando la primera y segunda reglas, cuadrar la curva cuyas ordenadas son los términos de la serie.
Newton muestra ejemplos para encontrar la cuadratura de curvas dadas por una división, ejemplos para curvas que tienen por ecuación una raíz, y ejemplos mediante la resolución de las

[13] El libro *Logarithmotechnia* de Nicolás Mercator movió a Newton para redactar el *De Analysi*.
[14] Traducción al castellano de los autores.
[15] Con esta regla refiera a la linealidad de la Regla I.
[16] Referente a una ecuación afectada. (Ver nota siguiente)

ecuaciones afectadas[17]. Estos últimos los subdivide en dos: *Resolución numeral de las ecuaciones afectadas* y *Resolución literal de ecuaciones afectadas*, en el primer tipo expone la aproximación sucesiva de la solución x de $f(x)$, y con el segundo expone la resolución de una ecuación $f(x,y)$ desarrollando y en serie de potencias de x y aplicando el método de aproximación que explica con el primer tipo. Mas adelante mostraremos un ejemplo del primer tipo de resolución, ya que allí Newton expone la resolución de ecuaciones por el método que hoy conocemos como método de Newton-Raphson[18], el cual consiste en la aproximación sucesiva de la solución x de $f(x)=0$ mediante las iteraciones $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$.[19] El método es una mejora del publicado anteriormente por Viète[20] en 1600 y posteriormente simplificado por Oughtred en su *Clavis Mathematicae* de 1647.

El método fue utilizado mucho antes en la Babilonia antigua para la extracción de raíces cuadradas.[21] Posteriormente Newton volvió a usar el método para la realización de sus tablas de raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de los de los primeros 10,000 números. (Durán, 2003)

> "Sean A el número y B su raíz cuadrada, cúbica o cuarta extraída por logaritmos hasta 5 decimales, entonces $\frac{1}{2}\left(B+\frac{A}{B}\right), \frac{1}{3}\left(2B+\frac{A}{B^2}\right)$ y $\frac{1}{4}\left(3B+\frac{A}{B^3}\right)$ será la aproximación deseada para la raíz cuadrada, cúbica o cuarta respectivamente."

Como hemos dicho, en la sección que Newton denomina "Numeralis æquationum affectarum resolutio" (Resolución *numeral* de ecuaciones afectadas) se expone un ejemplo en el que se aplica el método para encontrar numéricamente la mejor aproximación a la raíz real de la ecuación. Inicia la sección con un fragmento en el que parece comunicarnos que hay ejemplos que ya no podrían ser abordados de una manera aritmética,

> "Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo"

que significa: Pues toda dificultad reside en la resolución, ilustraré primeramente el modo que uso en una ecuación numeral.

A continuación exponemos el ejemplo que muestra en dicha sección:

Ejemplo 1. Sea la ecuación a resolver

$$y^3-2y-5=0 \qquad \text{(a)}$$

---

[17] Entenderemos por ecuaciones afectadas a aquellas a las que Newton aplicará el procedimiento para la determinación aproximada de las raíces de una ecuación, de tal forma que las reduce a una sucesión infinita.

[18] El método de Newton apareció publicado por primera vez en los *Principia* donde el escolio de la proposición XXXI del libro I explica cómo aplicarlo a la ecuación de Kepler $y-eseny-N=0$.

[19] El antecedente más antiguo se remonta al matemático árabe Al-Kashi (¿?-1429) quien usó un esquema parecido para resolver la ecuación cúbica $a=3x-4x^3$, el interés por la resolución proviene de que para $a=sen3\alpha$ la ecuación corresponde a la fórmula del ángulo triple. (Aaboe, 1954) Estos cómputos los redescubrió Henry Briggs (1561-1630) en su *Trigonometría Británica* que los extendió para la fórmula del ángulo quíntuple. Posteriormente fue aplicado por Viète y Oughtred. (Whiteside, 1967)

[20] Viète (1540-1603) llamado "el matemático francés más importante del siglo XVI" fue también abogado, miembro del Parlamento y consejero particular del rey Enrique IV de Francia, pero dedicaba sus horas libres a las matemáticas. Viète fue quien empezó a utilizar vocales para representar las incógnitas, y a las consonantes para representar magnitudes o números dados o supuestamente conocidos como los parámetros.

[21] Para detalles ver Cantoral y Reséndiz (2001); Cantoral y Rodríguez (2005)

La tabla 4 muestra resumidamente su procedimiento[22]:

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544853$ $+2{,}09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$+2y$	$-4 - 2p$
	-5	-5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+p^3$	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$
	$+6p^2$	$+0{,}06 + 1{,}2 + 6{,}0$
	$+10p$	$+1, + 10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$-0{,}0054 + r = q$	$+6{,}3q^2$	$+0{,}000183708 - 0{,}06804r + 6{,}3r^2$
	$+11{,}23q$	$-0{,}060642 + 11{,}23$
	$+0{,}061$	$+0{,}061$
	Summa	$+0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2$
$-0{,}00004854 + s = r$		

Tabla 4. Método de aproximación de Newton.

De forma desarrollada, el procedimiento se traduce en lo siguiente:
Sea 2 un número que difiere en menos que su décima parte de la raíz buscada[23], es decir, 2 es la mejor aproximación entera a la raíz buscada, ya que la diferencia entre la raíz verdadera y 2 es menor o igual que 0,1.
Se hace una mejor aproximación a la raíz buscada y, es decir, se supone $2 + p = y$, y se sustituye esta nueva corrección en la ecuación (a),

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$
$$\to (2+p)^3 - 2(2+p) - 5 = 0$$
$$\to 8 + 12p + 6p^2 + p^3 - 4 - 2p - 5 = 0$$
$$\to p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

Con lo cual resulta la nueva ecuación,

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \qquad \text{(a')}$$

cuya raíz p se requiere extraer a fin de añadir a la primera aproximación 2. Concretamente, como hemos dicho que p debe ser menor o igual a 0,1, en la ecuación (a') se desprecian los términos $p^3 + 6p^2$ por su menudencia, de donde se obtiene que $10p - 1 = 0$, o lo que es igual $p = 0{,}1$, que se acerca a la raíz verdadera p. Ahora para obtener una mejor aproximación a la raíz p, se supone ésta como $0{,}1 + q = p$, y como antes, se sustituye en (a'), esto es,

[22] Tomada del original.
[23] En efecto, el polinomio tiene un cambio de signo entre 2 y 2,1. La localización de raíces de polinomios por cambio de signo había sido sistematizado por Stevin en 1594, sin embargo, fue hasta principios del siglo XIX cuando esta sistematización en la búsqueda de raíces de ecuaciones por cambio de signo fue demostrada analíticamente. La demostración fue obra de Bolzano, que probó el resultado para funciones continuas y tuvo entonces que definir que se entendía por continuidad. (Durán, 2003)

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$
$$\to (0{,}1 + q)^3 + 6(0{,}1 + q)^2 + 10(0{,}1 + q) - 1 = 0$$
$$\to 0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3 + 0{,}06 + 1{,}2q + 6q^2 + 1 + 10q - 1 = 0$$
$$\to q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$$

de donde aparece la ecuación,

$$q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0. \qquad \text{(a'')}$$

Y por la misma razón que antes, se considera sólo $11{,}23q + 0{,}061$, que se acerca mucho a la verdad, o lo que es igual, q sea casi $= -0{,}0054$ (dividiendo hasta que se obtengan tantas figuras[24] cuantos lugares distan la primera figura de éste y la del cociente principal $\frac{0{,}061}{11{,}23}$), se escribe $-0{,}0054$, ya que es negativa.

Se supone ahora una mejor aproximación para q, $-0{,}0054 + r = q$, y se sustituye en la ecuación (a''). Y así sucesivamente hasta donde se quiera. De la misma forma, si se desea continuar la operación hasta dos veces tantas figuras cuantas aparecen ya en el cociente menos una (es decir 9 cifras numéricas), se sustituye q por $-0{,}0054 + r$ en la ecuación $6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061$ cuyo término primero (q^3) se desprecia a causa de su menudencia: y resulta la ecuación $6{,}3r^2 + 11{,}16196r + 0{,}000541708 = 0$, de donde despreciando también $6{,}3r^2$, se obtiene $r = -\frac{0{,}000541708}{11{,}16196} = -0{,}00004853$ poco más o menos. Y finalmente se sustraen las partes negativas de las positivas de los cocientes que se han obtenido, esto es:

Cocientes positivos: $2 + 0{,}1 = 2{,}1$

Cocientes negativos: $-\ 0{,}0054 + (-0{,}00004853) = -0{,}0054853$

Raíz buscada: $2{,}1 - 0{,}0054853 = 2{,}09455147$

Por lo tanto se obtiene el cociente buscado $2{,}09455147$.

Como puede observarse las iteraciones hechas, manifiestan el método de Newton: sustituyendo en la ecuación $f(x) = 0$, el valor x de la raíz por la aproximación $x + p$, de manera que $f(x + p) = 0$, luego desarrollando en potencias de $p : f(x + p) = f(x) + f'(x)p + \frac{f''(x)p^2}{2!} + \ldots$, y eliminando las potencias $p^2, p^3, \ldots$, resulta

$0 = f(x) + f'(x)p$, de donde, $p = -\frac{f(x)}{f'(x)}$.

De aquí que se obtiene la fórmula de recurrencia actualmente conocida para la aplicación del método

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

[24] Era común en los textos castellanos de matemáticas del renacimiento, el barroco y la ilustración utilizar la expresión *figura* para indicar las cifras.

Es de gran importancia señalar que no hay evidencia geométrica de x_{n+1} como punto de corte con el eje de las abscisas de la tangente a $y = f(x)$ en $x = x_n$.

En seguida del ejemplo refiere el siguiente párrafo:

> "Æquationes plurium dimensionum nihilo fecius resolvuntur, & operam fut fine, ut hic factum fuit lavabis, fi primos ejus terminos gradatim omiferis"

Lo que significa que, ecuaciones de diversas dimensiones pueden ser resueltas de modo que se puede utilizar el mismo método, operando hasta el final para encontrar una solución, si en cada paso se omite el primero de sus términos.

Es importante mencionar que en el escrito no hay justificación de la convergencia a la raíz buscada, asimismo Newton es consciente de que el método podría fallar y lo evidencia desde el principio del tratado:

> *"Methodum generalem, quam de curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem menſuranda, olim excogitaveram, in ſequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonſtratam habes."*

Con esto aclara que lo escrito en el *De Analysi* está brevemente explicado antes que demostrado con toda diligencia, y que expone un método general que cavilará un día para medir la cantidad de las curvas mediante una serie de términos infinitos.

Lo anterior puede deberse a que en efecto los matemáticos de este siglo (y también en el siglo XVIII y parte del XIX) estaban interesados, sobre todo en descubrir y no tanto en demostrar sus hallazgos en forma impecablemente lógica, como lo hacían los griegos. De aquí que Newton estuviera más interesado por descubrir que por demostrar. En el mismo sentido la frase:

> "Præterea notandum est quod in hoc exemplo, fi dubitarem an $0{,}1 = p$ veritati fatis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxiffem $6p^2 + 10p - 1 = 0$ & ejus radicis primam figuram in Quotiente fcripfiffem…"

en la opinión de Cajori (1960), refleja que Newton era consciente de que su método podía fallar. Siendo esto una constatación más de que el interés de los matemáticos de la época se inclinaban más por el descubrimiento que por la fundamentación rigurosa de lo descubierto.

Cabe mencionar que Newton no sabía si existían antecedentes del método en el sentido que aquí aplica, por lo que quizá sea esta una de las razones por las que se le dio el crédito total. En relación a esto menciona:

> "Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nefcio, certe mihi videtur præ reliquis simples, & usui accommodata. Demonstratio ejes ex ipso modo operando patet, unde cum opus sit, in memoriam facile revocatur"

Lo que podría significar que ignoraba si el método había sido divulgado, que le parecía un método muy simple y de uso cómodo. Que la demostración es similar a la forma de operar el método y por lo tanto que es fácil de recordar cuando es necesario.

Newton hace referencia a que el método se aplica casi con igual facilidad a ecuaciones en las que falte alguno o ninguno de sus términos. Ya que la ecuación inicial podría descomponerse en otra ecuación realizando sustituciones de cantidades[25] por otras, plantea que ello puede hacerse diversamente y que el siguiente modo (ejemplo siguiente) es el más expedito.

---

[25] Newton utiliza el término cantidad en dos sentidos: cantidades fijas y cantidades que varían, que en términos actuales serían constantes y variables, sin embargo, en el *De Analysi* Newton todavía no usó dichos términos.

Ejemplo 2. Sustitución de unas cantidades por otras.
Sea $p+3$, que ha de sustituir a y en la ecuación

$$y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0 \qquad \text{(b)}$$

Como quiera ésta puede resolverse en esta forma $\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$,[26] o lo que es igual, en términos actuales la ecuación (b) puede agruparse en la forma,

$$(((y-4)y+5)y-12)y+17=0. \qquad \text{(b')}$$

Lo que hace Newton es realizar la sustitución $p+3$ iniciando por la agrupación $(y-4)y$, esto es,

$$\begin{aligned}(y-4)y &= (p+3-4)(p+3)\\ &= (p-1)(p+3)\\ &= p^2+2p-3\end{aligned}$$

a continuación (b') indica que hay que sumar 5 a esta última ecuación,

$$\begin{aligned}((y-4)y+5) &= p^2+2p-3+5\\ &= p^2+2p+2\end{aligned}$$

y a esta última ecuación hay que multiplicar por y, o sea por $p+3$,

$$\begin{aligned}((y-4)y+5)y &= (p^2+2p+2)(p+3)\\ &= p^3+2p^2+2p+3p^2+6p+6\\ &= p^3+5p^2+8p+6\end{aligned}$$

luego hay que restar 12

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12) &= p^3+5p^2+8p+6-12\\ &= p^3+5p^2+8p-6\end{aligned}$$

como puede verse (b') indica que hay que multiplicar por $y=p+3$, esto es,

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12)y &= (p^3+5p^2+8p-6)(p+3)\\ &= p^4+5p^3+8p^2-6p+3p^3+15p^2+24p-18\\ &= p^4+8p^3+23p^2+18p-18\end{aligned}$$

Finalmente hay que sumar 17 a la última ecuación obtenida,

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12)y-17 &= p^4+8p^3+23p^2+18p-18+17\\ &= p^4+8p^3+23p^2+18p-1\end{aligned}$$

Así obtenemos que la nueva ecuación a resolver es $p^4+8p^3+23p^2+18p-1$.

Hemos observado entonces cómo aplica el método numéricamente, es decir, se ha hallado una aproximación numérica de la raíz real de una ecuación de una variable.

---

[26] Los superrayados indican paréntesis, fue Van Schooten quien difundió el uso de los superrayados para indicar lo que quedaba afectado por la correspondiente operación. Euler (1707-1783) con el uso habitual de los paréntesis contribuyó finalmente a su implantación. La expresión en forma actual equivale a $(((y-4)y+5)y-12)y+17=0.$ (Durán, 2003)

Finalmente para dar una visión general de la evolución del método de Newton mencionamos un breve recorrido por la historia: Joseph Raphson consideró al igual que Newton sólo polinomios en su *Análysis aequationum universalis* de 1690, pero con un enfoque más iterativo, de allí el método actual; Simpson publicó en 1740 una versión generalizada donde por primera vez aparecía reconocida implícitamente la representación de la derivada de la función en el método; A principios del siglo XIX Joseph Fourier presentó el método en términos de la ahora universal notación $f'(x)$, describiéndolo como 'le méthode newtonienne' (1831); Lagrange trabajó el método solamente en términos algebraicos; En Alemania, Runge dio el método en forma Leibnizciana, atribuyéndole el mérito a Newton (1900); Moritz Cantor estudió los métodos de aproximación de Newton, Raphson, Halley y de Lagny, describiendo a Raphson 'un absoluto admirador e imitador de Newton' (1898).
Como puede observarse hay varias reseñas sobre el método de aproximación por lo que hubo demasiada polémica en su génesis.

Conclusiones

Dos características de los métodos de aproximación para la resolución de ecuaciones que se han mostrado en este documento es la *repetición* en el proceso de operar sus cálculos y asimismo puede observarse que son de carácter *mecánico*.
Respecto a los objetivos que nos hemos planteado, hemos vislumbrado que en esencia el método que nos muestra Newton es puramente geométrico, aunque la tabla 1 muestra operaciones algebraicas, en realidad los problemas que Newton intentaba resolver son de orden geométrico, en la mayoría se referían a encontrar áreas bajo curvas, y esto se remonta a Arquímedes, estos problemas en la época de Newton se volvieron importantes, debido a que las curvas eran utilizadas para representar las magnitudes de velocidad en el tiempo. El área bajo una curva representaba entonces el cambio total en cuanto a posición. Dennis y Confrey (2000) mencionan que la geometría era considerada como la principal representación en matemáticas en el siglo XVII. La aritmética y el álgebra eran consideradas, como las formas de lenguaje escrito para la discusión de la verdad geométrica.
En el desarrollo mismo del escrito, se ha dado una visión epistemológica y socio-cultural del método de Newton, sin embargo, queremos mencionar unas últimas observaciones: Kollerstrom (1992) señala que cuando Raphson anunció el método a la Royal Society en 1690 hubo énfasis en su naturaleza innovadora, y refirió a Newton en su prefacio, declarando que su método era similar al descrito anteriormente por Newton, pero cuando publicó el método como un libro prefirió quitar el prefacio, y refirió únicamente a Viète como el antecesor de su método. Raphson también refirió a Oughtred y Harriot e hizo mencion sólo al Teorema binomial de Newton. Esto refleja que de alguna manera Raphson temía ser acusado de plagio por los miembros de la Royal Society. También menciona que en 1740 Simpson escribió 'A new method for the solution of equations' no haciendo referencia a algún predecesor y afirmando lo siguiente: "as it is more general than any hitherto given, it cannot but be considerable use". Abiertamente dijo: "Take the fluxion of the given equation…", de lo cual se procede a una versión de la regla que refleja el método de Newton, es decir, de la fórmula $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ donde $x = \alpha$ es una aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y $f'(x)$ es la derivada de la función en la cual ha sido sustituida α. Así esta versión de la que se habla, usa fluxiones en su procedimiento. Sus instrucciones fueron:

'…and having divided the whole by $\dot{x}$, let the quotient be represented by A'[27] De esta manera aplicó fluxiones al método de aproximación.

En el siglo XVIII hubo un debate sobre cuál método era preferible, Newton o Raphson, Frend (1796) menciona que con respecto a la simplicidad y concepción de los dos métodos se observa que el método de Raphson es preferible al de Newton, ya que el primero siempre regresa a la ecuación original, mientras que el segundo requiere una ecuación transformada la cual tiene más términos y coeficientes que la original.

Joseph Louis Lagrange discutió el método en su *Résolution des équations numériques* de 1798, concibiéndolo sin referencia a fluxiones o diferenciales. Al respecto del método de Newton señaló: primero, su falla para encontrar una raíz conmensurable en términos finitos; segundo, la inseguridad del proceso el cual deja duda de la exactitud de cada corrección en la nueva aproximación y; por último, la falla del método en el caso de una ecuación con raíces casi iguales. Desde el periodo de Lagrange, las contribuciones más importantes al análisis de ecuaciones numéricas, en suma a la mejora de Horner de los métodos de aproximación de Vièta y de Newton, son las hechas por Fourier (1768-1830), Budan (1761-1840) y Sturm (1803-1855). Las investigaciones de Budan fueron publicadas en 1807, las de Fourier en 1831 (después de su muerte) y las de Sturm en 1835.

Isaac Newton asimiló lo esencial del conocimiento matemático de tal forma que fue capaz de resolver problemas que cambiarían completamente la faz del análisis en particular y de la matemática en general. Descubrió la joya suprema del cálculo: la derivación y la integración. (Sánchez, 2003)

Finalmente cabe mencionar que el trabajo histórico sirve para informarnos sobre el presente, pues muchas de nuestras suposiciones actuales salen a la luz del trabajo histórico. Los resultados matemáticos son presentados a los estudiantes como un objeto terminado, sin embargo, podemos realizar cambios consustánciales a través de esta forma de investigación.

Reconocimientos

Agradecemos el apoyo del programa ALβAN, programa de becas de alto nivel de la Unión Europea para América Latina, por el suministro de recursos para esta investigación.

Referencias Bibliográficas

Aaboe, A. (1954) Al-Kāshi's iteration method for the determination of sin 1°. *Scripta Math*. 20, 24-29.

Burnside, W. y Panton, A. (1918) *The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms.*8a. Ed. Dublin University Press Series.

Cajori, F. (1960) *A history of mathematics.* Chelsea publishing company, -Chicago.

Cantoral, R. et al. (2000) *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas, 1ª reimpresión.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2001). *Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones. México: Grupo Editorial Iberoamérica.*

Cantoral, R. y Rodríguez, F. (2005). *Recursividad, convergencia y visualización. México:* Serie cuadernos didácticos. Edición especial Casio.

Dennis, D. y Confrey, J. (2000) La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Relime*, 3, 5-31.

[27] La expresión diferencial $\frac{dy}{dx}$ era a lo que se refería Simpson con 'A'.

Durán. J. A. (2003). Newton y el Análisis. *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.* Facsímile del libro Newton (1711). LXIX – CLXXVIII.

Frend, W. (1796) *The principles of algebra.* London. p. 456.

González, M. T. (2002) *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Kollerstrom, N. (1992). Thomas Simpson and method of approximation. *British Journal of the History of Science,* 25, 347 – 354.

Newton, I. (1711). *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias; cum enumeratione linearum tertii ordinis.* Facsímile 2003. Editado por Antonio, J. Durán Guardeño y Francisco Javier Pérez Hernández. Real Sociedad Matemática Española.

Pajus, M. (2000). On the benefits of introducing undergraduates to the history of mathematics – A french perspective in Katz, V. (2000) *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective.* Mathematical Asociation of America. 17 – 25.

Ruiz, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación en *Revista Española de Pedagogía* 34 (134). 449 – 475.

Sanchéz, J. M. (2003) Newton: el grande entre los grandes. *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.* Facsímile del libro Newton (1711). VII – L.

Sierra, M. (1989) Dos ejemplos de investigación histórica en Educación Matemática y su didáctica en las Escuelas de Magisterio (1940-1983) y Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (1958-1973). *Conferencia a las jornadas de Profesores de Didáctica de las Matemáticas de las escuelas de Magisterio de Andalucía*, Junio 1989., España.

Sierra, M., González, M.T. Y López, M del C. (2002) Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Uno Revista de Didáctica de la Matemática* 29, 77 – 94.

Whiteside, D. T. (1967) *The mathematical papers of Isaac Newton.* Tomo I. Cambridge University Press, Cambridge.

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN MATEMÁTICA EN LOS DOCENTES A TRAVÉS DE REPRESENTACIONES SOCIALES.

Bertha Ivonne Sánchez(1), Alberto Camacho(2)
(1)Instituto Tecnológico de Ciudad Jiménez
(2)Instituto Tecnológico de Chihuahua II
ivonne_mx_2000@yahoo.com, camachoalberto@hotmail.com
Reporte de investigación

Resumen

Con el objetivo de validar para su posterior utilización, se aplicó un precuestionario sobre el concepto de función matemática a docentes del área de Ciencias Básicas de los Institutos Tecnológicos de Jiménez y Chihuahua II , en el que se investigan las concepciones que poseen sobre el tema, pues consideramos que estas favorecen u obstaculizan la asimilación del concepto por parte de los estudiantes. La importancia es tal que se encuentra en los cinco cursos de matemáticas que se imparten en el Sistema Tecnológico, así como en aplicaciones propias de la materia y de otras asignaturas, lo que hace necesaria su correcta comprensión por parte de los estudiantes. El diseño del cuestionario se hizo a través de la metodología francesa de *Representaciones Sociales*, donde formulamos una serie de preguntas para responderse mediante asociación libre a partir de un término inductor: el concepto de función. Para lograr un *nivel de esquematización*, se pidió la creación de *cadenas asociativas* a partir de grupos de palabras. Las respuestas permitieron sondear el *nodo central* y los *elementos periféricos*. Para el tratamiento de los datos utilizamos el Software QSR Nvivo 7.
Los resultados iniciales arrojan las concepciones de los profesores sobre el tema, e inciden directamente en las prácticas sociales que realizan en el ambiente escolar. Es esencial analizar las relaciones entre prácticas y representaciones sociales para reconocer su estructura.

Palabras clave:
Función matemática, representaciones sociales, núcleo central, elementos periféricos.

Introducción

El tema de función ha sido estudiado en numerosas ocasiones y con diferentes enfoques en matemática educativa, lo que nos sugiere la importancia del tema. Sin hacer un análisis exhaustivo, dentro de estas investigaciones, podemos citar a Sierpinska (1992), quien en su estudio sobre la noción de función, determina 19 categorías en la comprensión de la misma, en donde se aprecian componentes cognitivos y epistemológicos, e incluye además, fenómenos como el de motivación, conocimientos previos y formas de exposición.

En el plano didáctico - epistemológico, encontramos a Ruiz (1998) donde analiza y pone en manifiesto las concepciones que presentan los alumnos sobre la noción de función. Estudia el fenómeno de transposición didáctica e identifica los obstáculos didácticos y cognitivos alrededor del concepto, y confirma que las concepciones de los alumnos coinciden con la evolución histórica, además de que el tratamiento que se da al concepto de función como “objeto de estudio” le resta importancia como herramienta matemática.

Guzmán (1998) en la presentación que hace sobre el aprendizaje por parte de los estudiantes de nociones relativas a funciones y el sentido que cobran en ellos, utiliza un enfoque cognitivo basado en registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de las propiedades de las funciones. Por medio de un análisis de respuestas pone en evidencia que no se ha dado la suficiente importancia a la relación existente entre las diversas formas en que es posible representar una función.

García y Serrano (2000) presentan un estudio sobre el conocimiento profesional del concepto de función por parte de los docentes en matemáticas en Educación Básica con reciente actualización en el tema, los resultados indican una compleja y estrecha relación entre el significado que cada uno de los docentes concede al concepto y el significado institucional desarrollado por el programa de actualización, y como estas variables deben ser tomadas en cuenta para explicar los errores e inconsistencias de profesores y estudiantes. Concluyendo que aun con la experiencia profesional de los profesores encuestados, no existe una aproximación a la comprensión racional, sino de tipo instrumental, no establecen traslaciones entre las diferentes formas de representar una función, haciendo de lado la funcionalidad de este tránsito, lo que lleva a una dificultad al tratar de identificar o construir funciones de la vida cotidiana. Nula coherencia entre las definiciones formal e informal propuestas por ellos mismos, lo que conduce a que el significado personal, junto con las prácticas institucionales, no provean de sentido al concepto ni a sus prácticas en el aula.

Un análisis de tipo sistémico acerca del discurso del profesor en el aula, en que se considera la variación como tema principal, centrado en las nociones de función y derivada, lo muestran Cantoral y Reséndiz (2003), en el que se estudian las formas o prácticas que se realizan cuando se desea explicar una idea matemática. El estudio concluye que dependiendo de las situaciones de interacción, profesor y estudiantes, estos “construyen” sus propias explicaciones, las cuales con compartidas o negociadas como acuerdos sociales con la intención de validar el discurso sobre la clase. Se identificó la participación de los alumnos en clase como una variable que puede hacer que el docente tenga que cambiar su discurso para lograr el acuerdo sobre ciertas convenciones utilizadas.

Acerca de los cambios conceptuales que pueden presentarse, Valero (2003) presenta una tesis en que analiza la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los estudiantes sobre la noción de función. Mediante diseños instruccionales se analizan gráficas de funciones elementales para favorecer el cambio conceptual. Encontrando que desde el punto de vista didáctico, las concepciones alternativas sufren transformaciones pues no pueden permanecer indefinidamente en los estudiantes, aún cuando algunas son resistentes al cambio.

Un estudio socioepistemológico sobre la función trigonométrica es presentado por Montiel (2005), donde analiza diversas investigaciones sobre el concepto de función para llegar a la construcción social de la función trigonométrica. Centrada en el fenómeno didáctico, aporta elementos de carácter social para explicar el tratamiento escolar de la función trigonométrica. Además de importantes reflexiones sobre la propia aproximación teórica.

Estos y otros trabajos de investigación han reportado diversos acercamientos al concepto de función, encontramos estudios de tipo didáctico, cognitivo, epistemológico, y recientemente investigaciones que involucran lo social para explicar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Incluir lo social no es nuevo, lo novedoso es el enfoque que se da al incluir esta componente para observar el objeto matemático y su relación con los fenómenos que se presentan en el aula y el medio que les rodea. Es en este sentido que emerge nuestra investigación, pues consideramos que las concepciones y comportamientos de estudiantes y profesores surgen como respuesta a factores como el discurso matemático escolar y su relación con el medio en que se realizan.

En el ámbito escolar, el concepto de función matemática es abordado en los cursos de cálculo de nivel superior en primer semestre. Específicamente en el Sistema de Institutos Tecnológicos, el tema se ubica en la segunda unidad del programa de Matemáticas I, Cálculo Diferencial para todas las carreras de ingeniería impartidas en el mismo. La importancia de este concepto es tal que de ahí se desprenden una serie de razonamientos y aplicaciones propias de la materia y de otras asignaturas lo que hace necesaria su correcta comprensión por parte de los estudiantes. En nuestro estudio, utilizamos la metodología de las Representaciones Sociales (RS) para indagar las concepciones que poseen los profesores sobre el concepto de función matemática, estamos convencidos, que tales representaciones pueden favorecer u obstaculizar la asimilación del concepto en los estudiantes, pues como menciona (Durkheim, 1894/2004, p. 21) *". . .la educación esta siempre más allá de una simple socialización. . ."* , lo que establece un vínculo entre la RS y la educación. Esto nos recuerda, que todo proceso educativo se desarrolla mediante una serie de prácticas educativas que relacionan tanto a docentes y estudiantes como a sus experiencias vividas.
Estamos en posición, entonces, de analizar las concepciones que poseen los profesores acerca del concepto de función y su puesta en evidencia a través de las prácticas sociales.

Metodología

Prácticas sociales y socioepistemología

La Socio epistemología (S. E) surge como línea de investigación en México a finales del siglo pasado con los trabajos que en esa dirección realizaron investigadores del área del nivel superior del Departamento de Matemática Educativa (D. M. E) del Cinvestav I. P. N. Donde aparece como eje fundamental de investigación del "pensamiento y lenguaje variacional", el énfasis de ese acercamiento teórico es a partir de un referente sociocultural analizando los mecanismos sociales de difusión e institucionalización del saber y sus prácticas asociadas. Incorpora el análisis del contexto, pues asume que el desarrollo de ideas no se produce únicamente en forma interna, sino que es un proceso social, que se manifiesta a través de prácticas sociales, procedimientos y habilidades. (Castañeda, 2004).

La componente social está imbricada con las componentes cognitiva, didáctica y metodológica. Bajo esta perspectiva de investigación se ha intentando "interpretar" los "fenómenos didácticos" a través de las relaciones contenidas en las prácticas sociales que se realizan al conocimiento. Teniendo como argumentos fundamentales: la naturaleza de la práctica social, y la resignificación del conocimiento matemático escolar. Esta resignificación es vista como el reconocimiento de las diferentes aristas del conocimiento en su evolución, en tanto análisis epistemológico. En consecuencia, las diferentes circunstancias del conocimiento, determinadas por el investigador, serán colocadas en los diseños situacionales. Cada cambio del saber determinará u operará cambios en lo cognitivo de los estudiantes, de modo que en la situación, es de suponer, se lleve el control de ambas componentes: epistemológica y cognitiva. (Camacho, 2006)

En los trabajos de (Arrieta, et al, 2003, 418) referente a práctica social, esta es planteada como *"(...) Un conjunto de acciones voluntarias que, intencionalmente, desarrolla el individuo para construir conocimiento."*
Las prácticas sociales, bajo esta noción, se conciben como generadoras de conocimiento y los escenarios o situaciones didácticas para que la construcción del mismo ocurra, deben centrarse en ellas, de manera que las componentes de las situaciones "componentes de convención matemática" sean consecuencias particulares de tales prácticas a partir de su reproducción en el salón de clase.[28]

En el examen del conocimiento se toma en cuenta el papel de los escenarios históricos, culturales e institucionales y sus relaciones, ya que estas se ven afectadas por los conocimientos matemáticos construidos por la sociedad fuera del ambiente escolar, que son introducidos al sistema de enseñanza y afectan o modifican la estructura y funcionalidad y las relaciones entre profesor y estudiantes (Cantoral, R. y Farfán, R.,2003). Esto ha llevado a modificar el discurso matemático escolar teniendo como base la actividad humana, en donde se involucran tres aspectos: 1) la naturaleza de la problemática: señala que en el sistema didáctico el conocimiento matemático es una construcción social, 2) las prácticas de los grupos humanos: son todas las formas de actividad humana que conducen a una resignificación del conocimiento y 3) el desarrollo de las prácticas en el sistema didáctico: se presentan en respuesta a la problemática (Cordero, 2003).

La SE cuenta hasta el momento con investigación de campo en dos direcciones, por un lado, la búsqueda de bases elementales de significaciones con las que se pueda incidir en la "reconstrucción del conocimiento matemático escolar" en los diseños de situaciones y, por otro, investigación de corte experimental en la que se ha puesto en juego la simulación y modelación, en el intento que los estudiantes construyan conocimiento a través de las re-significaciones que se reproducen en las actividades. En cuanto a las construcciones mentales, o sea el tratamiento cognitivo del conocimiento, es acordado en el marco mismo de las resignificaciones que se generan en las prácticas sociales, en tanto que la construcción del conocimiento es anclada en una epistemología de prácticas y no propiamente de conceptos (Cordero, 2003), lo cual no deja lugar a dudas, puesto que las epistemologías que resultan de las prácticas son categorizadas a través de las diversas reformulaciones o re-significaciones del conocimiento.

Nuestro estudio, responde a las construcciones mentales que los docentes presentan sobre el concepto de función, nos interesa el tema pues reconocemos la importancia de las prácticas sociales como generadoras de conocimiento matemático. En el análisis de las prácticas sociales deben incluirse dos factores: las condiciones sociales, históricas, materiales y la forma de apropiación en el que se incluyen los factores simbólicos, cognitivos y de representación (Abric, 2004). De aquí que las prácticas y las representaciones sociales están íntimamente relacionadas, cualquier diferencia lleva a la transformación de una u otra. En este contexto y con el fin de obtener la información sobre las concepciones presentes, nos apoyamos en la metodología francesa sobre representaciones sociales.

[28] Arrieta, et, al (2003): *op, cit,* p. 420

Definiciones, características y funciones de las RS

El concepto de RS se introdujo hace más de cuarenta años por Serge Moscovici en su libro "La psychanalyse, son image et son publique", en 1961. Y se ha venido desarrollando a lo largo de este tiempo. Una RS es aquella construida por las interacciones en un grupo social y está formada por ideas, creencias, opiniones e incluso actitudes sobre algún concepto en particular. Cuya función principal es interpretar la realidad, manteniendo relaciones de simbolización y atribuyéndole significaciones (Guimelli, 2004).

Toda RS posee dos componentes: *la cognitiva*, pues supone un sujeto activo, y, *la social*, pues las prácticas están determinadas por las condiciones sociales en que la representación se realiza y se transmite. (Abric, 1994). Es una forma de interpretar nuestra vida diaria, una forma de conocimiento social. Toda actividad mental individual está determinada a través del contexto grupal en que se desarrolla el individuo, por tanto la noción de RS nos sitúa en un punto en que aprehendemos diariamente de nuestro medio ambiente la información que se vierte sobre él, de las demás personas. El conocimiento es, entonces, “espontáneo”, socialmente elaborado y compartido.

El concepto de RS designa una forma de conocimiento específico, el saber del sentido común, cuyos contenidos manifiestan la operación de procesos generativos y funcionales socialmente caracterizados (Jodelet, 1984). Se define entonces, por información, imágenes, opiniones, actitudes de un sujeto, hacia otro sujeto. Es un fenómeno característico de la interacción del sujeto y del objeto, que se enfrentan modificándose mutuamente sin cesar. Las RS se conforman a partir de la información, la experiencia, el conocimiento y los modelos de pensamiento, se construyen mediante imágenes, sistemas y categorías sobre un elemento en particular.

Toda RS posee las siguientes características:

- Siempre es la representación de un objeto,
- Tiene carácter de imagen y es posible realizar pequeños cambios el la idea, la percepción y el concepto.
- Posee un carácter simbólico y significante
- Posee un carácter constructivo
- Posee carácter autónomo y creativo
- Incorpora nuevos elementos del saber en una red de categorías mas familiares (Doise, 2005)

Toda representación permite dar sentido y entender la realidad a través de un sistema de referencias, por lo que es necesario saber cuál es el objeto de la representación, porque para que un objeto sea viable para su representación es condición que los elementos organizadores se asocien de manera directa al objeto mismo, pues no todo objeto es precisamente objeto de representación. De aquí se obtienen dos tipos de representaciones: a) *las autónomas* en las que el núcleo central se ubica dentro del objeto mismo, y las b) *no autónomas*, donde su núcleo central se coloca fuera del objeto, dentro de una representación mas amplia en la que el objeto es necesario.

Según Abric, poseen cuatro funciones esenciales:

1. La función principal de las RS es la interpretación de la realidad que nos rodea ya que facilitan la comunicación al contar con un marco de referencia en un contexto específico lo que permite el intercambio y la difusión de saberes.
2. Definen la identidad y permiten salvaguardar la especificidad de los grupos, ejerce un control en los procesos de socialización.
3. Guían los comportamientos y prácticas. Refleja la naturaleza de reglas y vínculos sociales, lo que conlleva a comportamientos o prácticas obligados.
4. Función justificadora. Permite justificar la definición y comportamiento de los grupos.

Núcleo central y elementos periféricos

Toda representación está construida alrededor del núcleo o sistema central, formado por uno o varios elementos que dan significación a dicha representación. El núcleo central es el elemento más resistente al cambio y es determinado tanto por la naturaleza del objeto representado, como por la relación que el grupo (o sujeto) mantiene con el objeto, y además con un sistema de valores y normas sociales. La identificación del núcleo central es determinante para conocer el objeto propio de la representación. Está vinculado a la memoria colectiva y a la historia del grupo, es estable, coherente y rígido, resistente al cambio y poco sensible al contexto inmediato.

Alrededor del núcleo central se tienen los elementos periféricos o sistema periférico, como elementos jerarquizados desempeñan un papel esencial en la representación, pues son la interface entre el núcleo central y el objeto mismo. Los elementos periféricos permiten la integración de las experiencias individuales, lo que soporta la heterogeneidad del grupo, es sensible, evolutivo y sensible al contexto inmediato. Asegura la protección del nodo central, siendo el vínculo entre este y la situación concreta donde se elabora o trabaja la representación. Sus funciones son: Concreción, viene del anclaje de la representación en el contexto; Regulación, es el proceso de adaptar las evoluciones del contexto; la Defensa, favorece un sistema capaz de resistir los cambios. Son el vínculo entre el núcleo central y la situación concreta donde se elabora o trabaja la representación (Abric, 1996)

La representación, posee entonces, un doble sistema:

Un sistema central, esencialmente social, que relaciona las condiciones históricas, sociológicas e ideológicas. Su papel es esencial en la estabilidad y coherencia de la representación

Un sistema periférico, asociado a las características individuales, permite, de esta forma una adaptación en función de las experiencias personales en torno al núcleo central. El sistema periférico no se considera menor que el central, es fundamental para la preservación o transformación de la RS.

SISTEMA CENTRAL	SISTEMA PERIFÉRICO
Vinculado a la memoria colectiva y a la historia de grupo	Permite la integración de las experiencias e historias individuales
Consensual, define la homogeneidad del grupo	Soporta la heterogeneidad el grupo
Estable, coherente y rígido	Flexible: soporta las contradicciones
Resiste al cambio	Evolutivo

Poco sensible al contexto inmediato Sensible al contexto inmediato

(Según Abric, 1994) Tomado de El pensamiento social. Guimelli, 2004 p. 85.

En el estudio sobre la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los estudiantes sobre el concepto de función (Valero, 2003), la autora menciona que existen concepciones que se encuentran mas arraigadas en los estudiantes, que son más difíciles de modificar. Desde el punto de vista de las RS, esto ocurre cuando lo que se quiere modificar se encuentra en el sistema central de dicha representación, las concepciones alternativas que se remueven con mayor facilidad serán entonces, las que se encuentren en el sistema periférico de la representación social del concepto de función. En el mismo estudio se menciona que estas concepciones alternativas sufren transformaciones pues no pueden permanecer indefinidamente en los estudiantes, aunque sean resistentes al cambio, nosotros agregamos que no pueden permanecer indefinidamente en los estudiantes pues van a existir prácticas sociales vinculadas a ellas que van a modificar la RS que de ellas se tiene, esta modificación puede darse tanto en el núcleo central como en los elementos periféricos.

Recolección de las representaciones sociales

Existen diversos métodos de recolección de datos que nos llevan a determinar una RS, de acuerdo al estudio realizado, la pertinencia y calidad proporcionan la validez del análisis y sus resultados (Abric, 1994). De ahí la importancia de elegir la herramienta adecuada para obtener la representación social en estudio, pues recordemos que estas son definidas por dos factores: su contenido y su organización, por lo que ambos deben estudiarse como uno sólo, puesto que se integra dentro de un grupo en un contexto social e ideológico del cual depende. El grupo social construye y representa la realidad, de ahí que el análisis de las representaciones sociales conlleve estudiar los componentes cognitivos y los componentes sociales. "*Una representación siempre es una representación de algo para alguien"* (Flores, J. Prólogo en Doise, 2005)

El estudio de las RS supone la utilización de métodos de recolección que nos permitan:
a) Identificar y hacer emerger los factores de la representación,
b) Conocer la organización de sus componentes y,
c) La identificación y verificación del sistema central.

Métodos de recolección de contenido

a) Los métodos interrogativos (verbales o esquemáticos) obtienen una expresión que afecta al objeto estudiado: Entrevista, Cuestionario, Tablas inductoras, Dibujos y soportes gráficos, Aproximación monográfica.
b) Los métodos asociativos tiene una base más espontánea y menos controlada: La asociación libre, Carta asociativa

Métodos de identificación de la organización y estructura de la representación:

a) Métodos de identificación de lazos: Construcción de pares de palabras, Grupos de términos

b) Métodos de jerarquización: Los tris jerarquizados sucesivos, Elecciones sucesivas por bloques

Métodos de control de la centralidad: Técnica de cuestionamiento del núcleo central, Método de inducción por guión, Método de Esquemas cognitivos base

En nuestro estudio, utilizamos un acercamiento plurimetodológico, dado que es necesario para cumplir con las tres condiciones para la recolección. En la primera parte de la encuesta sobre el concepto de función matemática, se inicia con una presentación sobre la intención del cuestionario y algunas recomendaciones para su respuesta, seguido de una parte de datos generales que consideramos importantes para nuestro estudio.

Primera Etapa: Recolección del contenido. Se presentan dos preguntas en las que se utiliza el método de asociación libre, mediante el cual, los docentes escriben las palabras (mínimo 4 máximo 10) que evocan al pensar en la palabra función. Es una forma de sondear el núcleo central latente.

Segunda Etapa: Búsqueda del contenido y del sistema central. Se utiliza un método para jerarquizar la información , de una lista de veinte proposiciones (múltiplo de cinco) se piden las cinco más importantes, luego las cinco más alejadas del concepto.

Para verificar la información del sistema se presentan una serie de proposiciones sobre conceptos teóricos básicos referentes a función matemática para que sean respondidas por los encuestados.

Identificación de lazos y puesta en evidencia de los elementos centrales: Nos lleva a la organización interna y ensamble de los elementos de la representación. Representa además un método de asociación libre. Se presenta una lista de 21 palabras para que se construyan diez cadenas asociativas, cada una de ellas debe iniciar con el término función y contar con cuatro términos incluyendo aquel. Cada término puede ser utilizado en varias cadenas

Tercera Etapa: Verificación de la centralidad

Es un método indirecto para encontrar una relación de similitud entre sus partes. Dada una lista de 30 palabras se pide que marque las palabras que no comprenda, enseguida que haga grupos de palabras (de entre dos y seis por categoría), y finalmente para cada categoría escriba un título (de dos o tres palabras máximo por título). Una palabra puede ser utilizada al mismo tiempo en diferentes grupos.

El método de tratamiento de datos

Existen diversos programas de este tipo, Atlas.ti 5, Nud Ist 6 y MAXqda 2, Aquad 5, Etnograph 5, Win max pro, en nuestro estudio utilizamos el Software QSR Nvivo 7 *[29] por ser una herramienta cuyo objetivo es facilitar el análisis cualitativo de datos textuales en proyectos de investigación, mediante un programa altamente avanzado y de los más utilizados a nivel mundial. Posee una interfaz simple y fácil de usar. Mediante este programa es posible gestionar tanto datos enriquecidos, como texto enriquecido, usando negrita, cursiva, colores y otros formatos - con amplia habilidad para editar, visualizar código y vincular documentos tal y como son creados, codificados, filtrados, manejados y registrados, con unidades de análisis no fijas.

Incluye: Manejo de documentos y codificación, manejo de datos, modelado (representación gráfica), resúmenes, informes y exportación de los mismos. Los documentos son escritos en un procesador de texto (Word) e importados a Nvivo 7, dentro del cual se modifican y/o codifican de acuerdo al criterio del investigador. Todos los datos y búsquedas pueden ser guardadas, editadas ó codificadas en nuevos nodos o carpetas. Con el Nvivo 7 se puede dividir la información textual recopilada en la investigación, asignar categorías estableciendo relaciones, realizar búsquedas textuales, construir matrices y tablas de frecuencias con la información necesaria.

Resultados

Primera etapa: recolección del contenido

Para las dos primeras preguntas, los docentes respondieron mediante asociación libre a partir de un término inductor: función. Dando entre tres y siete palabras del total de diez que era posible escribir. Las mas utilizadas son: dominio, contradominio, dependencia, correspondencia, expresión y conjuntos.

Segunda Etapa: Búsqueda del contenido y del sistema central

Comprueba la existencia de una jerarquización colectiva. Pone en evidencia los elementos centrales de la representación.

Cinco mas importantes o cercanas del concepto	Cinco mas alejadas del concepto de función
Ley de causa efecto, gráfica, interpretar, fórmula, modelo, modelo matemático, ley, idealización.	Numérica, números reales, ordenada, origen. El 10% respondió que todas las palabras tienen que ver con el concepto.

Para verificar la información del sistema de representación:

Pregunta 4. Basada en conceptos matemáticos teóricos, los resultados muestran un dominio del tema entre un 45% y 60%.

[29] QSR International Pty. Ltd. Provee este y otros programas para análisis de datos. Nvivo 7 es la última versión del programa NUD*IST (Non-numerical Unstructured Data * Indexing Searching and Theorizing: Datos No estructurados y no numéricos * Indexar, registrar y teorizar).

Identificación de lazos y puesta en evidencia de los elementos centrales

Pregunta 5: mediante asociación libre deben construirse diez cadenas de cuatro términos cada una iniciando con el de función. La mayoría de los encuestados construyó las diez cadenas completas, de un total de 21 palabras mostradas, el promedio de utilización es de 13 a 15 palabras. Las mas utilizadas fueron Tabla de valores con frecuencia de 26 por todos los sujetos encuestados, seguido por modelo, dependencia, representación y gráfica.

Tercera Etapa: Verificación de la centralidad

Pregunta 6, permite mostrar la organización del contenido de una representación en un sistema de categorías mediante grupos de palabras:
Número promedio de palabras utilizadas 15 a 18.
El 76% completaron el número total de cadenas con los términos sugeridos.
El 61% nombró los grupos, el resto no.
Palabras que no comprende: Sujeto 1: idealización y verbal. Sujeto 2: Subrayó algebraico, numérica, modelo, idealización, ordenada, interpretar, curva, imagen, verbal, origen (sin embargo, tres de ellas las utilizó en la respuesta cinco para construir cadenas). Sujeto 3: idealización.

Análisis de la población:
Se aplicó el cuestionario de evaluación Pretest a cinco docentes del departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez. Y a ocho docentes del departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Chihuahua II.

Característica	Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez	Instituto Tecnológico de Chihuahua II
Años laborando en docencia	0-1 2 pers 11-15 2 pers 16-20 1 pers	16-20 3 21+ 5
Sexo	Masculino 3 Femenino 2	Masculino 7 Femenino 1
Cursos de matemáticas que ha impartido	Mate I 4 Mate II 3 MateIII 4 Mate VI 1 Mate para L.C. 3	Mate I 4 Mate II 2 MateIII 5 Mate VI 2 MateV 1 Análisis Numérico 2 Mate para L.I. 3 Mate Arquitectura 3 Métodos Numéricos 1
Estudió el concepto de función en :	Secundaria 2 Bachillerato 3 Profesional 3	Secundaria Bachillerato 5 Profesional 5
Grado Académico	Ingeniería 4 Maestría Admón. 1	Ingeniería 5 Maestría 2

	Doctorado	Doctorado M.E. 1
Edad del profesor en años	25-30 1 31-35 1 36-40 2 41-45 1 46+	25-30 31-35 36-40 41-45 3 46+ 5

Discusión

Consideramos que el tema de Función matemática tiene un papel muy importante en la enseñanza de la matemática, pues de ahí se desprenden una serie de temas que, de no estar claro este concepto, será difícil comprenderlos cabalmente.

La intención del pretest es reconocer las concepciones que los docentes del área de matemáticas presentan sobre el concepto de función matemática, por lo que se consideró conveniente permitir que ellos escribieran "espontáneamente" las palabras que evocan al pensar en este concepto, para contar con una serie de ideas del "sentido común" (Dollo, 2001). Al requerir una jeraquización de proposiciones relativas al concepto, se eligieron aquellas que son presentadas en diversos libros de texto como relacionadas con el tema, y se considera que nos llevarán explícitamente a reconocerlas en el esquema de la RS. La respuesta del cuestionario se desarrolló de manera espontánea por parte de los docentes en ambas instituciones. Sobre el formato de cuestionario es necesario incluir una pregunta para verificar el núcleo central (recordemos que esta aplicación fue un pretest para validar, y el cuestionario final se aplicará a un mayor número de docentes en diferentes instituciones de nivel superior). De esta aplicación obtuvimos que el núcleo central está formado por: dependencia de variables, regla de correspondencia, grafica, tabla de valores, modelo y dependencia; los elementos periféricos: variable independiente, relación, dominio y rango. De acuerdo a la teoría e las RS son estos últimos los que permiten una adaptación de las experiencias personales al concepto y son fundamentales para el mejor entendimiento de el sistema central que presta estabilidad y coherencia al concepto.

Un resultado desconcertante es el que refiere los conocimientos teóricos de los encuestados ya que oscilan de 45% a 60%. No previmos que pudiera ser así, sin embargo, refuerza nuestra idea inicial de que las concepciones y en este caso los conocimientos teóricos de los docentes, apoyan o detienen la correcta comprensión del concepto por parte de los estudiantes. Recordemos la investigación de García y Serrano (2000) sobre el conocimiento profesional del concepto de función en docentes de nivel básico que recientemente habían recibido actualización docente, concluyeron que a pesar de la experiencia , los profesores no presentaban coherencia alguna entre las definiciones proporcionadas por ellos mismos, y tampoco eran capaces de establecer traslaciones entre las formas de representar una función, afectando directamente la comprensión en los estudiantes.

Conclusiones

Los autores que han estudiado las RS insisten en su carácter construido y estructurado. Según Johsua y Dupin podemos nombrar a la representación como el contenido estructurado del pensamiento de un sujeto (citado en Dollo, 2001, p. 74), las RS no sólo son visiones del mundo, también son verdaderas reconstrucciones mentales.

Consideramos, que es de especial importancia la forma de conocer un contenido matemático (entendido como las concepciones –RS- que el profesor tiene del mismo), ya que deriva en lo que se considera importante aprender, esto es, en las prácticas sociales que el profesor provoca en el aula. Una RS no es exclusiva del plano cognitivo, por lo que deben analizarse las relaciones con el plano sociocultural, el entender las relaciones entre representaciones y prácticas sociales implica un doble trabajo de análisis y conocimiento de cada uno de los términos involucrados.

En este trabajo mostramos un primer acercamiento al tema, los resultados obtenidos nos permiten realizar una segunda aplicación del test (que incluya una pregunta de verificación del núcleo central) a un mayor número de docentes, para corroborar los resultados y vincularlos con las acciones en el aula, pues indiscutiblemente, una transforma a la otra, modificando el discurso matemático escolar.

Referencias

Abric, J. C. (1994). *Pratiques sociales et représentations*. Paris: PUF.

Abric. J.C. (1996). Specific processes on social representations. [Versión electrónica] *Papers on social representations*. *5*, 77-80.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Arrieta, J, G. Buendía, M. Ferrari, G. Martínez & L. Suárez (2003). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 17, tomo I. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Santiago de Chile.

Camacho, A. (2006). Revisión de las prácticas sociales y la socioepistemología. México. *Educación Matemática 18*(1), 133 a 160.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(1)*,* 27-40.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(2)*,* 133-154.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Cordero, F.(2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 16. Tomo 1. México: Grupo Edictorial Iberoamérica. pp. 73-78

Doise, W., Clémence, A. & Lorenzi-Cioldi, F. (2005). Representaciones sociales y análisis de datos. Versión en español. México: Instituto Mora.

Dollo, Ch. (2001). *Quels déterminants pour l'évolution des savoirs scolaires en Sciences Economiques et Sociales ?" (l'exemple du chômage)*. Tesis de doctorado. U. de Provence, Francia.

Durkheim, É. (1894). *Las reglas del método sociológico*. México (edición en español, 2004): Ediciones Coyoacán.

García, G. & Serrano, C. (2000). Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: el caso de la función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 357-370.

Guimelli, Ch. (2004). *El pensamiento social*. México: Ediciones Coyoacán.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(1), 5-21.

Jodelet, D. (1984). Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales. En S. Moscovici (Ed.). *La representación social: fenómenos conceptos y teoría*. (pp.469-494). Barcelona, España: Paidós.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Purcell, E. J.& Varberg, D. (1992). Calculus with Analytic Geometry. *Cap. 2: Functions and limits*. (pp. 41 –60). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Publicaciones de la Universidad de Jaén, España.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds). *The concept of function: Aspects of epistemolofy and pedagogy* (pp. 25-28) Washimgton, DC, USA: Mathematical Association of America.

Stewart, J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. *Cap. 1: Funciones y modelos* (pp. 10-77). Bogotá, Colombia: Thompson Editores.

Valero, M. (2003). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca de funciones en situación escolar*. Tesis de maestría no publicada. CICATA – IPN. México.

VIDEOPAPER: UNA HERRAMIENTA TECNOLÓGICA AUXILIAR EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Estelita García, Erika García, Isabel Tuyub, Asuman Oktaç
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN
egarcia@cinvestav.mx,egarciat@cinvestav.mx,ituyub@cinvestav.mx, oktac@cinvestav.mx
Experiencia de aula (cartel)

Resumen

Se presentan y discuten los elementos que se abordarán en el cartel "*Videopaper: una herramienta tecnológica auxiliar en la matemática educativa*", a través del cual pretendemos dar a conocer este recurso poco difundido en nuestro país. El *videopaper* tiene un formato similar a una página Web, en la que se integra texto, imágenes y videos de forma sincronizada. Por medio de ejemplos concretos se ilustrarán algunas funciones que desempeña esta herramienta tecnológica. Destacamos el hecho de que el videopaper puede favorecer a que el docente observe su práctica, motivando una reflexión sobre la misma.

Palabras clave: Videopaper, investigación, actualización docente.

Introducción

El Seminario de Educación y Nuevas Tecnologías impartido en el Cinvestav-IPN, ofrece a los investigadores en formación una serie de herramientas tecnológicas que intentan vincular la teoría con la práctica, para influir positivamente en el aprendizaje de los estudiantes y favorecer la difusión de investigaciones en Matemática Educativa.

El objetivo del cartel es difundir una de las herramientas vistas en dicho seminario, denominada v*ideopaper*.

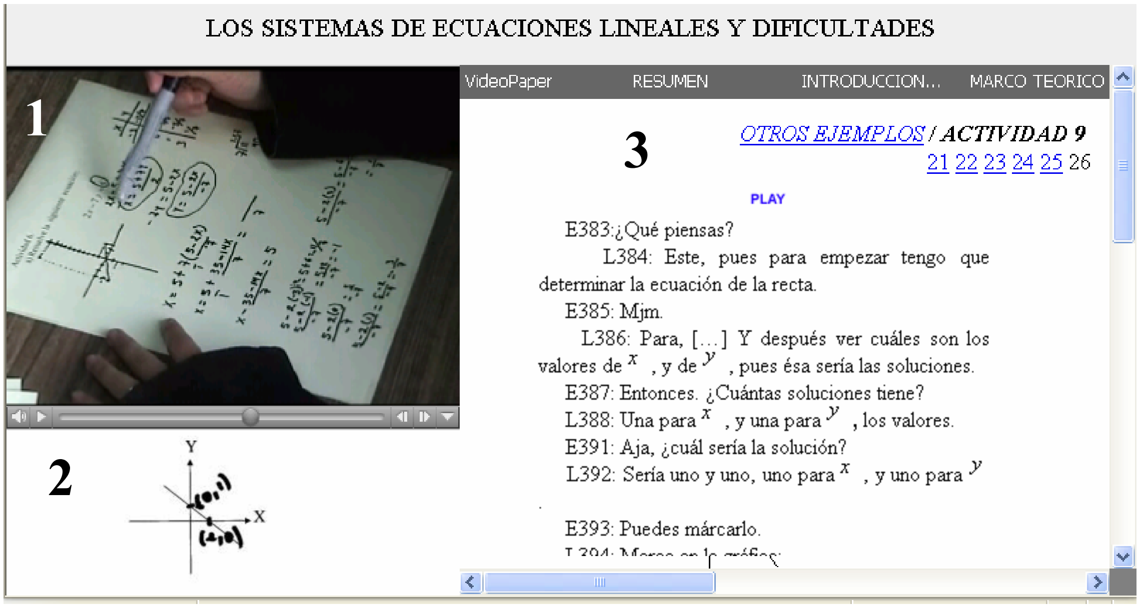
Descripción y funciones del videopaper

Esta herramienta es un nuevo género para la producción, uso y difusión de la investigación educativa. Integra y sincroniza diferentes formas de representación como texto, video e imágenes en un mismo documento de manera holística (Olivero, et al, 2004).

Un videopaper tiene un formato similar a una página Web que tiene tres zonas (figura 1):

- La *zona de video* (1) contiene un video en formato *QuickTime* con su propio control.
- La *zona de imágenes* (2) permite desplegar imágenes o recursos sincronizados con el video.
- La *zona de texto* (3) contiene las páginas organizadas en secciones. Estas se muestran en un menú de navegación y contienen una o más páginas, que se pueden seleccionar por medio de enlaces al número de la página o desde enlaces que se colocan en el video.

El texto, el video, y las imágenes se pueden enlazar con el uso de "hipervínculos".



Se presentan dos ejemplos que ilustran las funciones, que bajo nuestra perspectiva, desempeña el videopaper, las cuales son las siguientes: Auxiliar en la investigación y facilitador del aprendizaje.

Auxiliar en la investigación

Corresponde al *videopaper* como la unión entre las investigaciones en Matemática Educativa comunicadas en forma escrita y los episodios del aula de clase o las entrevistas filmadas de la problemática abordada por el investigador. Lo anterior, permite que en el reporte de investigación sea posible apreciar, de manera más explícita, la complejidad de la realidad estudiada. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 2.

Este ejemplo presenta una investigación de corte descriptivo al interior de un aula de cálculo, cuyo objetivo es caracterizar las interacciones del sistema didáctico. En este caso, el videopaper permite a los investigadores y académicos apreciar la cultura del escenario escolar. En la zona 1 se observan episodios de clase, en la zona 2, los elementos plasmados en la pizarra que no son distinguibles por el alcance de la cámara y en la zona 3, las observaciones y análisis de las clases filmadas.

Facilitador del aprendizaje

Es la función destinada a que el alumno por medio del videopaper podrá desarrollar procesos, técnicas o habilidades relacionados con ciertos contenidos matemáticos que se muestran en él; una de las ventajas es que el alumno puede avanzar a su ritmo, repitiendo cada etapa de los procesos mostrados si lo considera necesario. Ver figura 3.

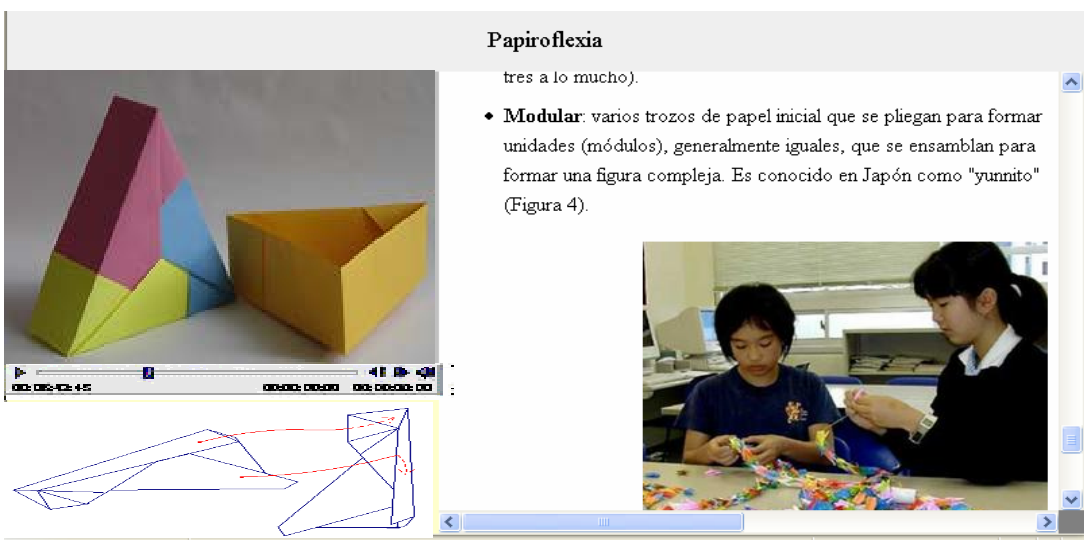


Figura 3

En este ejemplo, el alumno observa en la zona 1 de manera dinámica la secuencia para la realización de una figura de origami modular, en la zona 2 se muestra la simbología empleada para construir dichas figuras y en la zona 3 se presentan las indicaciones acordes a los videos.

Consideraciones finales

La descripción de las dos funciones anteriores del videopaper, permite observar el potencial de la herramienta para representar la realidad estudiada, y en este sentido puede motivar la reflexión del profesor acerca de su práctica en el aula. De esta forma, la herramienta puede incidir en una transformación de la práctica docente.

El videopaper tanto como auxiliar en la investigación como herramienta facilitadora del aprendizaje, puede incidir de manera significativa en la práctica del profesor, por lo que consideramos que una tercera función del videopaper consiste en favorecer la actualización docente (por ejemplo, ver Molina, Oktaç, 2006).

En general, consideramos que la difusión de esta herramienta tecnológica pude ayudar a las comunidades de investigadores y académicos a encontrar nuevos caminos para ayudar a los procesos de aprendizaje y formas de ver, crear y usar la investigación en la educación.

El videopaper permite hacer más significativos y relevantes los resultados de una investigación, ayudando a los profesores a conectar y mejorar el entendimiento e interpretación de su práctica.

Referencias bibliográficas

Molina, G. y Oktaç, A. (2006). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. Videopaper preparado en el marco del proyecto CONACYT 2002-C01-417265.

Olivero, F., John, P. y Sutherland, R. (2004). Seeing is believing: using videopapers to transform teachers´ professional knowledge and practice, *Cambridge Journal of Education*, 34(2), 179-191.

The Concord Consortium, (2006). Guía del uso del Videopaper Builder 3 en español Versión 3.0.1 para Windows y Macintosh, recuperado de: http://www.vpb.concord.org

LA COMUNICACIÓN EN UN CURSO EN LÍNEA DE MATEMÁTICAS, Y SU RELACIÓN CON EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES.

Edgar Gilberto Añorve Solano
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán-MÉXICO
eanorve@gmail.com
Reporte de Investigación

Resumen

La investigación que se reporta, surgió de la necesidad de analizar los procesos de aprendizaje y de comunicación, en un Curso en Línea de Matemáticas, específicamente en la asignatura de

Ecuaciones Diferenciales, con materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo. La investigación consistió en el diseño e implementación de un curso en línea. Se hizo uso de los medios tecnológicos de información y comunicación, donde la comunicación entre los actores fue sincrónica y asincrónica. Los materiales didácticos y la interacción entre los actores se concentraron en un espacio virtual en la plataforma de *webexone*. En el presente trabajo, se hace un análisis de las discusiones en los foros virtuales, se describen las características didácticas del curso en línea y su relación con el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Palabras Clave: Aprendizaje Autogestivo, Comunicación Asíncrona y Síncrona. Modelos de Cursos en Línea.

Introducción

Las nuevas tecnologías han incursionado en la educación convencional, como una herramienta más para las actividades de los profesores de matemáticas, además, las Instituciones de Educación Superior se han apoyado de las bondades que ofrece la red Internet para la capacitación de sus docentes y estudiantes.

El Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica (SNEST), órgano rector de los 84 Institutos Tecnológicos Federales establecidos a lo largo del territorio mexicano, preocupado por la calidad educativa, y con la intención de enfrentar los cambios de la sociedad y principalmente de la educación, estableció en el año 2003 un Modelo Educativo para el Tercer Mileno que consistió básicamente en renovar la estructura organizacional y académica de los Institutos Tecnológicos. Entre las metas del Modelo Educativo destacan[30] (Zapatero, 2004): a) el atender el 5% (13,500 alumnos) de la matricula total de los Institutos Tecnológicos federales en programas no presenciales; b) disminuir en 10% el índice de deserción en las materias correspondientes a las ciencias básicas; c) en todas las instituciones del sistema, contar con un programa de apoyo o alternativo para los estudiantes que presenten deficiencias académicas; d) diseñar y actualizar los programas de estudio de educación continua y de educación no presencial.

El Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán perteneciente al SNEST, ha implementado estrategias para reducir el índice de deserción y de reprobación en las asignaturas de matemáticas, entre las que se encuentran: un curso de inducción para estudiantes de nuevo ingreso y la asesoría personalizada. Empero, los resultados no han sido satisfactorios y, además, el número de docentes es escaso comparado con las solicitudes de los estudiantes para las asesorías. Por ende, surgió el interés e inquietud por instrumentar una estrategia alternativa e innovadora, con el apoyo de las bondades que ofrece las nuevas tecnologías y que permitan principalmente, incidir en los procesos de aprendizaje de los alumnos, y por consiguiente, propiciar el aprendizaje autogestivo de las ecuaciones diferenciales.

La investigación se enfocó en diseñar, desarrollar y experimentar un curso en línea de ecuaciones diferenciales con materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo, y, evaluar el efecto en la base de las bondades de comunicación que ofrece la red Internet, al aprendizaje de los alumnos, el desarrollo de sus habilidades en la resolución de los problemas y en consecuencia, el

[30] El Modelo Educativo para el Tercer Milenio del SNEST contiene 74 metas. Para el presente documento, sólo se exponen las más relevantes en relación al contexto de la investigación.

rendimiento académico. La comunicación sincrónica y asincrónica entre los estudiantes y el profesor se realizó en el medio virtual que ofrece la compañía webexone.

Para verificar el efecto del curso, se realizó un análisis de regresión lineal múltiple, al observar las relaciones de las variables predictoras –la participación en los foros y actividades de estudio–, sobre el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Las actividades de estudio, fueron elementos esenciales para el diseño y elaboración de los materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo. El análisis del modelo estadístico se realizó en el programa *Statgraphics*.

Para verificar los resultados del aprendizaje en los alumnos, se elaboraron y aplicaron exámenes en concordancia con los objetivos del curso. En cambio, para evaluar las actividades de aprendizaje de los alumnos, se establecieron criterios de evaluación que consistieron en: a) la argumentación de cada paso en la solución del problema, b) el procedimiento y resultado final correctos, c) la elaboración e interpretación de gráficas y d) la comprobación de resultados.

La ponderación de las interacciones en los foros de discusión, se clasificaron a partir de la estructura definida por Henri (1995), que consiste en discriminar las interacciones en comunicación Implícita y Explícita. La primera se refiere a los mensajes registrados dentro del tema de discusión, pero sin conexión a los mensajes de otras personas. Y la segunda, interacción explícita, aquellos mensajes en que su contenido se dirige a los mensajes de otras personas en el tema de discusión. Además, en la interacción explícita, se consideró en los mensajes las categorías de organización, eficiencia, pertinencia y aportación. En la investigación fue importante evaluar la calidad de las participaciones de los foros, aún cuando la división de las participaciones fue en "clases", como variable cualitativa, pero el tratamiento de dichas variables es estadístico cuantitativo (Córica & Holloway, 2003). Por la encuesta se valoró la satisfacción de los alumnos con respecto al material didáctico, el software Maple y las actividades de equipo, que cuantificaron con una escala de Likert (González, 2005).

El estudio nos dio la pauta para diseñar y desarrollar materiales didácticos, orientados al aprendizaje autogestivo, de los cursos de matemáticas que ofrece el Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán. Así como diseñar actividades para el aprendizaje de los contenidos matemáticos, que contemplen el trabajo individual, el trabajo colaborativo y el uso de las tecnologías de comunicación e información. Actualmente, en el Instituto se cuenta con ocho cursos en línea, cinco de éstos en la modalidad de enseñanza mixta (*b-learning*).

Metodología

La enseñanza de las matemáticas en los cursos en línea

La didáctica de las matemáticas se ha trasladado a otros contextos, por la facilidad de integrar los documentos de hipertexto en los medios tecnológicos para la navegación en la red Internet. En Vanderlbilt University desarrollaron una pedagogía matemática basado en el uso de juegos interactivos y lúdicos en línea con problemas matemáticos. La herramienta central fue el *Mathematica*, un programa de álgebra simbólica, en que la finalidad fue el organizar las clases y materiales para sus cursos presenciales desde cualquier lugar que permitiera el acceso (Crooke, Froeb & Tschantz, 2000). En cambio, la Open University, estudiaron la carga de trabajo y el tiempo de las actividades que conlleva a los estudiantes en los cursos de matemáticas en el nivel superior, e investigaron la correlación que existe entre el aprendizaje de los contenidos y el tiempo de estudio para completar las actividades del material didáctico (Zand, 2000).

Por otro lado, en los cursos a distancia y en línea por las características que la modalidad implica, la comunicación mediada por computadora es preponderante para el aprendizaje y el trabajo colaborativo. La comunicación es uno de los problemas que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debido a la semántica y semiótica del lenguaje algebraico (Hitt, 1998; Cantoral, 2000; 2001). Chomienne y Malaison (2000) destacan que el aprendizaje de las matemáticas en un curso en línea, la comunicación mediada por computadora y el trabajo colaborativo son elementos fundamentales para enriquecer el conocimiento. Para el diseño del curso en línea de ecuaciones diferenciales, se consideró un programa de álgebra simbólica que permitiera en el estudiante trabajar con las actividades de aprendizaje, tanto, en el trabajo individual y colaborativo. Además, de diseñar las actividades para que el estudiante las trabajara en un tiempo óptimo y que principalmente se reflejara en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, mediante en la comunicación sincrónica y asincrónica.

Aprendizaje Autogestivo

El proceso de aprendizaje es diferente para cada estudiante, y en consecuencia se presentan estilos de aprendizaje diferentes. Con respecto al estilo de aprendizaje se han creado teorías sobre cómo las personas aprenden mejor (Woolfolk, 1999, pp. 27-50). El sustento teórico del proyecto fue el aprendizaje autogestivo. Si bien, en la literatura no se presenta una definición concreta de esta forma de aprender, existe un marco teórico fundamentado en las teorías constructivistas del aprendizaje (Kennedy, Petrovic, Judd Lawrence, Dodds, Delbridge, & Harris, 2000, Abdullah, 2001).

Los materiales didácticos se diseñaron de tal manera que fueran orientados al aprendizaje autogestivo. Para tal fin se trataron de: a) reducir progresivamente la dependencia del docente; b) apoyar al estudiante para que fortalezca el autoestima con el fin de que sea capaz de trabajar en grupo; c) promover la autoevaluación con un enfoque autoreflexivo, autorregulador y autocorrector; d) guiar al estudiante en la definición de sus necesidades de aprendizaje (contenido y contexto); e) ayudar al estudiante para que asuma la responsabilidad en definir sus objetivos de aprendizaje y evaluación de su progreso; f) procurar la transferencia del conocimiento (relacionarlo con problemas de la vida real); g) facilitar la identificación y planteamiento de problemas; y h) fomentar la toma de decisiones para seleccionar alternativas de solución a problemas planteados.

Fischer y Scharff (2000) mencionan que con el *aprendizaje autogestivo* el estudiante logra desarrollar las competencias que le permite desempeñarse con éxito en su proyecto de vida. Así pues, en la investigación, se consideró el proceso que implica esta forma de aprender para diseñar un curso en línea de Ecuaciones Diferenciales, mediante el apoyo de las nuevas tecnologías de información y comunicación, y que fue la base para crear un ambiente que propició el aprendizaje autogestivo.

Modelos de los cursos en línea

Mason (2001) distingue tres tipos de modelos usados comúnmente en la red Internet: a) tutorial, b) envolvente y c) integrador. El primer modelo es el más utilizado en los cursos en línea, básicamente están compuestos de material didáctico impreso en la estructura de una página Web y de un tutorial de apoyo. Los cursos en línea del modelo envolvente, consisten de una guía de estudio, actividades y discusión alrededor de materiales existentes, por ejemplo, libros de texto, fuentes de cd-rom, y tutoriales.

El modelo integrador se fundamenta en actividades de una comunidad de aprendizaje. La esencia es a través de la discusión síncrona y asíncrona, el acceso y proceso de la información. Los contenidos del curso son fluidos y dinámicos, debido a que están determinados por las actividades individuales y de grupo, y depende de la creatividad y el aprendizaje de la comunidad participante (Fischer & Scharff, 1998; Wayand & Dee, 2001; Zañartu, 2002). Para el curso de ecuaciones diferenciales que se utilizó el modelo integrador (ver figura 1), tiene por dirección http://mateitcg.webexone.com.

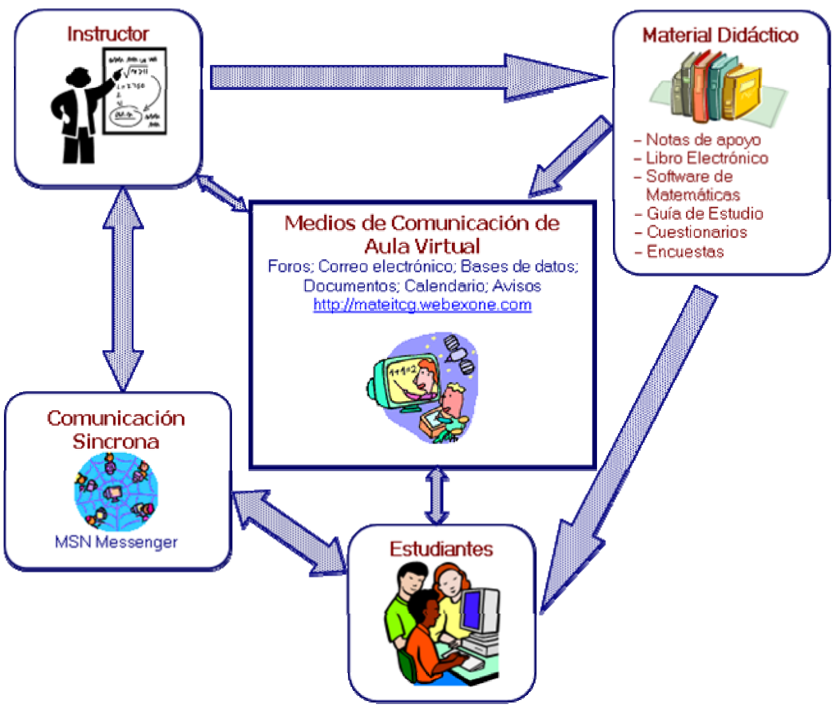


Figura 1. Modelo utilizado en el curso en línea de ecuaciones diferenciales.

Diseño del curso en línea

La columna vertebral del curso en línea de Ecuaciones Diferenciales, fue la guía de estudio constituida por nueve secciones con la finalidad de facilitar el aprendizaje de los contenidos (Ulloa, 2003, pp. 49-59). Se plantearon actividades de estudio, diseñadas de manera que contemplaran las cinco dimensiones de aprendizaje (Marzano, 1992/1997). Estas actividades fueron una importante connotación en el diseño de la guía de estudio, ya que el alumno tuvo idea de cuánto tiempo pudiese dedicar a cada actividad, así como, la forma y el medio en el que se presentaron los productos. Las actividades de aprendizaje de la guía de estudio, tuvieron soporte en los materiales: notas de apoyo y apuntes de ecuaciones diferenciales con Maple 8™.

Los materiales didácticos fueron diseñados con una secuencia lógica apropiada con el cuidado de presentar, en un principio los elementos más simples y generales y posteriormente introducir la información más detallada y compleja (Añorve & Nesterova, 2003). En cada uno de ellos se delimitó la intencionalidad. Los documentos expuestos en el aula virtual, se presentaron en tres formatos electrónicos, Word Office, PDF y el formato Web (HTML), con el propósito fue ofrecer diversas posibilidades de trabajo.

Resultados y Discusión

Comunicación asíncrona y síncrona

Se analizaron 103 mensajes registrados en el foro entre los estudiantes y el instructor. La tabla 1, muestra los mensajes registrados según la categoría de Henri (1995):

Tabla 1
Mensajes registrados por categoría

Categoría	Número de Mensajes	Porcentaje
Interacción Implícita	32	31 %
Interacción Explícita	35	33 %
Independiente	36	36 %

Los mensajes que predominaron se encuentran en enunciados independientes, es decir, aquellos mensajes que no están relacionados con el tema de discusión. Los mensajes dirigidos a otra persona dentro del tema de discusión corresponden al 33% (interacción explícita). Los mensajes dentro del tema a discutir, pero que no están dirigidos a otras personas corresponden al 31% (interacción implícita). Si bien los mensajes independientes son altos, el coeficiente de interactividad[31] del foro es significativo 0.64, lo que nos dice que moderadamente, se generó discusión de las actividades contempladas en la guía de estudios.

Con respecto a la conversación en línea mediante MSN Messenger fue mayor en este tipo de comunicación. Se registraron 176 llamadas, donde el 75 % fueron preguntas o comentarios en relación a las actividades de estudios, y el uso del Maple 8. El 15 % de las llamadas encaminadas a los comentarios de las discusiones del foro y el resto (10%), sin relación alguna con el curso. La participación en los foros fue baja, al ser la conversación en línea de las más solicitadas.

Análisis del modelo de regresión lineal múltiple

[31] El coeficiente de interactividad es la suma de los mensajes de interacción implícita e interacción explícita entre el número total de mensajes.

Después de verificar los supuestos de linealidad, independencia, homocedasticidad, normalidad y no colinealidad, para garantizar la validez del modelo de regresión. El modelo lineal que arrojó el programa Statgraphics fue:

Examen = -0.592449 + 0.833527*Actividades + 0.668551*Foros.

El modelo describe la relación entre los puntajes que obtuvieron los estudiantes en las actividades de estudio, las participaciones en los foros de discusión, y la evaluación de los contenidos del curso mediante los exámenes. Para el análisis, se consideró la calidad de las participaciones en los foros. En el menú *Regresión model selection* del Statgraphics se realizó el mejor ajuste de las variables predictoras (actividades y foros) tomadas de una y dos. De la columna del estadístico error cuadrado medio se seleccionó el menor valor, que se relaciona con la mejor combinación de variables predictoras.

Tabla 2
Resultados del Modelo

Error cuadrado medio	R^2	R^2 *(ajustada)*	Cp	Variables incluidas
0.00348189	73.1556	70.3298	3.0	Actividades y Foros

El modelo explica 73.1556 % de la variabilidad de evaluación de contenidos del curso, la diferencia (26.8444 %) se debe a otros factores que no están considerados, por ejemplo, la conversación en línea, ya que esta fue el tipo de comunicación de mayor frecuencia, lo que refleja que los alumnos prefieren comunicarse directamente con el instructor, saber que ellos están de alguna manera presentes con él, por lo que es parte de la seguridad y motivación en el estudiante.

Análisis de la encuesta

La estructura de la encuesta fue en tres secciones, con objeto de conocer la opinión de los estudiantes con respecto al material didáctico, las actividades y el *software* Maple. En cada uno de los ítems de la encuesta se le asignó un valor en la escala de Likert. El promedio con respecto al material fue de 4.3, superior al asignado a la opción **Buena** de la encuesta. De la misma forma, para las actividades y Maple consideran los estudiantes que fue **Buena** con un promedio de cuatro.

Desarrollo del curso

El profesor en su papel de observador en la fase experimental, se orientó a registrar el desempeño de los estudiantes, como lo fueron: la entrega de los trabajos, la participación en los foros y la asesoría en línea (conversación síncrona). En el aula virtual la participación de los 22 estudiantes en la entrega de las actividades fue activa. El software Maple 8, fue un elemento esencial para que los estudiantes trabajasen las actividades, este programa, permitió que los estudiantes se preocuparan por reconocer y recordar conceptos para resolver problemas y adquirir habilidad en el manejo de la información en su contexto, reflejándose principalmente en la interpretación de los resultados.

Conclusiones

A lo largo del curso y en varios momentos se confirmó la teoría que engloba el aprendizaje autogestivo, debido a que el estudiante determinó su espacio y ritmo conforme avanzó en el trabajo del curso, hasta llegar la autodirección del aprendizaje, donde el instructor cambió de estatus y fue parte del mismo proceso.

En el curso en línea de matemáticas, es necesario diseñar materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo, con diferentes posibilidades de adquirir la información, y que principalmente estén acorde a los objetivos y necesidades del curso. Con base en los resultados y durante el proceso de evaluación se observó el efecto que produjo la alternativa propuesta, los parámetros que correlacionan las respuestas al cuestionario de opinión con la actividad propia del estudiante en relación al curso en línea se centró en el cumplimiento de las actividades y objetivo planteados.

La comunicación en ningún momento se interrumpió, al ser la conversación en línea el medio que prevaleció en el curso y fue reflejado en el trabajo de los alumnos en las actividades de estudio. Los parámetros que correlacionan las respuestas de la encuesta de opinión con la actividad propia del estudiante en relación al curso en línea se centraron en el cumplimiento de las actividades y objetivo planteados. Las respuestas a la encuesta, una vez censado por el estudiante sobre la satisfacción del uso de los materiales didácticos y sus contenidos, reflejan que es favorable y constituyen un elemento activo en el proceso de aprendizaje en línea. El promedio de las respuestas al cuestionario con respecto a los materiales didácticos es superior a la media (4.2774), por lo que al cumplir este parámetro se concluye que los materiales didácticos orientados al aprendizaje autogestivo como parte de los elementos del curso en línea son aceptables.

El uso de los foros de discusión en conjunto con los materiales didácticos, como notas de apoyo, guías de estudio, actividades de aprendizaje que especifiquen claramente las instrucciones para los estudiantes, influyen positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, lo anterior es el resultado de los puntajes obtenidos en las actividades de estudio, en la evaluación del aprendizaje de los estudiantes y la participación en los foros, que según con la propuesta están interrelacionados todos los elementos, confirmándose en el estudio de regresión lineal. En este trabajo, se destaca la satisfacción de los estudiantes por el uso de los medios y materiales, principalmente la comunicación síncrona, por la razón de que el profesor esté en línea con los estudiantes, los motiva a trabajar en las actividades, al excluir la frustración de soledad a lo largo del curso.

La importancia del presente trabajo radicó en que la investigación contribuye de manera relevante, en la comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en un ambiente en línea, para este caso en particular, el uso de los medios de comunicación, en el ambiente virtual de *webexone* y con materiales orientados al aprendizaje autogestivo. Sin embargo, para futuras investigaciones se hacen las siguientes recomendaciones:

Evaluar y actualizar constantemente los materiales didácticos y ofrecer al estudiante una gama de posibilidades para aprender. Para los materiales orientados al aprendizaje autogestivo, de un curso de matemáticas en línea, es necesario que en su diseño se contemple la interacción entre los actores (estudiantes e instructor) y que los resultados de aprendizaje de los estudiantes, se manifiesten en los procesos de apropiación del conocimiento.

El estudio independiente y autogestivo lleva consigo la responsabilidad de la propia formación por parte del alumno y las tecnologías tienen un papel fundamental en las comunidades de aprendizaje por lo que es necesario investigar el impacto que tienen las comunidades de aprendizaje en línea en los cursos de matemáticas.

Los cursos de matemáticas en línea no se dan de manera automática, no surgen como generación espontánea ni son tampoco resultado de las nuevas tecnologías, el diseño pedagógico es decisivo para que realmente surjan comunidades virtuales.

El profesor del curso en línea además de ser experto en su área, necesita tener conocimientos teóricos y habilidades de carácter pedagógico y técnico para crear situaciones que fomenten el aprendizaje por cuenta propia, la construcción y la socialización del conocimiento mediante el uso selectivo de los medios tecnológicos en actividades de aprendizaje colaborativo, cooperativo e individual, teniendo en cuenta que es un mediador del proceso educativo.

Reconocimientos

A las autoridades administrativas del **Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán**, por la oportunidad de realizar y finiquitar el proyecto, aún cuando en el Sistema de IT no se tenga contemplado de forma institucional los cursos en línea para las asignaturas de matemáticas.
A los profesores compañeros de la **Academia de Ciencias Básicas** por el apoyo brindado en la revisión de los materiales didácticos y la elaboración de exámenes.

Referencias bibliográficas

Abdullah, M. (2001). Self-directed learning (Informe No. D169.). Bloomington, In, EE. UU.: Indiana University,U S Department of Education. (No. de servicio de reproducción de documentos ERIC EDO-CS-01-10)
Añorve, S. E., Nesterova, D. E. (2003). Un curso de ecuaciones diferenciales autogestivo en línea. Teleduc´03. La Habana, Cuba, 3, 189-205.
Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A., Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Córica, J. L., Holloway, M. (2003). Un estudio cuantitativo de las discusiones en los foros. *Revista de Educación a Distancia*. 10, 31-56.

Chomienne, M. & Malaison, S. (2000). L'implantation d'un cours de mathématiques sur internet au CCFD: un travail collaboratif [La implementación de un curso de matemáticas vía Internet en CCFD: Un trabajo colaborativo]. *Journal collegial des technologies de l'information et des communications*, 11(2). Recuperado el 25 de junio de 2003 de http://clic.ntic.org/clic11/math.htm
Crooke, P., Froeb, L. & Tschantz, S. (2000). Pedagogy using mathematica through the web. *Asynchonous Learning Network Magazine*, 2(2). Obtenido el 2 de enero del 2001, de http://www.aln.org/publications/magazine/v2n2/froeb.asp

Fischer, G. & Scharff, E. (2000). Learning Technologies in Support of Self-Directed Learning [Versión electrónica]. *Journal of Interactive Media in Education*, 98 (4), 117-123. Obtenido el 21 de enero del 2002 de http://ww-jime.open.ac.uk/98/4

González, V. (2005). Método de Escalamiento Unidimensional de Likert. Obtenido en junio 14, 2005, del sitio Web de la Universitat de Valencia: http://www.uv.es/~hbaesa/PS_TEMA_Likert.pdf

Henri, F. (1995). Formación a distancia y teleconferencia asistida por ordenador: interactividad, cuasi-interactividad o monólogo. *Revista de Educación a Distancia*. 12, 61-77.

Hitt, F. (1998). Researching a problem of convergence with Mathematica: History and visualization of a mathematical idea, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., 28 (2) ,697-706.

Kennedy, G., Petrovic, T., Judd, T. Lawrence, J., Dodds, A., Delbridge, L. & Harris, P. (2000). The personal learning planner: A software tool for self directed learning. En R. Diensber (Ed.), *2000 Annual ASCILITE Conference*: Vol. 5. Obtenido el 23 de abril de 2003 de http://www.ascilite.org.au/conferences/coffs00/

Marzano, R. (1997). *Las dimensiones del aprendizaje* (Gómez, L. F. Trad.). Guadalajara, México: ITESO. (Trabajo original publicado en 1992).

Mason, R. (2001). Models of Online Courses. *Ed at a Distance Journal*, 15(7). Obtenido el 10 de mayo del 2001, de http://www.usdla.org/html/journal/JUL01_Issue/article02.html

Ulloa, R. (2003). *Fundamentación y construcción de guías de estudio*. Guadalajara, México: UDG.

Wayand, L. & Dee, J. (2001). *A Framework for Understanding Distance Interaction/Distance Comunication*. En Mitchell (Ed), Syllabus Technology for Higher Education Confernce. Obtenido el 25 de febrero de 2001, de http://www.syllabus.com

Woolfolk, A. (1999). Psicología Educativa. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Zand, H. (2000). Using learning activities in mathematics: workload and study time. *Studies in higher education*, 25(1), 97-111.

Zañartu, L.M. (2000). *Aprendizaje colaborativo: Una nueva forma de diálogo interpersonal y en red*. Barcelona, España: UAB.

Zapatero, A. (Ed). (2004). Modelo Educativo para el Tercer Milenio. Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos. México: SEP.

LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO: EL CASO DE LOS LOGARITMOS

Marcela Ferrari, Rosa María Farfán
Facultad de Matemáticas - Universidad Autónoma de Guerrero
marcela_fe @yahoo.com.mx
Jóvenes Investigadores

Palabras Clave: logaritmos, covariación, socioepistemología

Presentamos los avances de nuestro proyecto de investigación, bajo la idea de discutir la dicotomía que se entabla en nuestra comunidad de matemáticos educativos en torno de "la noción función". Aquellos que abogan por una mirada modernista, en búsqueda de una única respuesta, y aquellos que preferimos estudiar características particulares de cada función, inclinándonos a visualizarla como una herramienta y no como un objeto único.

Se percibe hoy en nuestra disciplina, la matemática educativa, la necesidad de desarrollar investigaciones en torno a la construcción de conocimiento matemático desde una perspectiva social. Algunos, como los *socioconstructivistas*, que la miran desde estructuras mentales, donde la cohesión y la colaboración se entremezclan para dar lugar a la abstracción reflexiva y al fortalecimiento de estructuras. Otros, como los *socioculturales*, que dirigen la mirada a los contextos sociohistóricos y temporales donde las herramientas median entre el sujeto y el objeto, imbuidos en prácticas sociales. O aquellos, como los *interaccionistas*, que se enfocan en la generación de discursos desde la interacción y negociación de significados, donde la relación profesor-estudiante es el foco principal de análisis. O, por último los *socioepistemólogos*, aquellos que reconocen la necesidad de desarrollar investigaciones sistémicas en torno a la construcción social del conocimiento matemático.

En respuesta a ello, el grupo de investigación en el que participo se ha preocupado, desde hace unos años, por desarrollar un acercamiento teórico que contemple los cuatro polos que conciernen a esta problemática bajo el supuesto que no se puede comprender ni analizar los fenómenos didácticos sin estudiar a fondo el discurso matemático escolar y por tanto cuestionar los mecanismos de su transmisión; sin rever el devenir en objeto a ser enseñando ni la forma en que vive en la escuela, lo que conlleva a cuestionar los contenidos y significados que se proponen en las curricula; sin recabar y analizar las concepciones de los alumnos y docentes respecto a un contenido específico y por tanto sin tomar una postura respecto a qué significa aprender o apropiarse de una noción; por último, sin tener presente que la matemática es una actividad humana y que aprender es una práctica social por tanto cultural e históricamente determinada.

En este sentido, este trabajo busca dar evidencias de la construcción social del conocimiento, particularmente de los logaritmos donde la covariación, inherente a prácticas como la de facilitar cálculos o la de modelar, genera contextos discursivos particulares que nos permiten abordar una caracterización de *lo logarítmico*. Por tanto, nos preguntamos sobre las prácticas que rigieron los argumentos, herramientas y significados puestos en juego en la sociogénesis de este modelo. Nos interesa investigar entonces, sobre los elementos que dieron vida y potenciaron el desarrollo de los logaritmos hasta convertirla en una de las herramientas matemáticas insoslayable para los usuarios (ingenieros, químicos, economistas, matemáticos, etc.) pero tan desatendida escolarmente. Estudiar así, los argumentos y significados que construirían los muchachos en el aula al involucrarlos en una red de modelos donde lo covaricional logarítmico genere prácticas discursivas y una caracterización particular.

Estado de arte

El presente proyecto tiene como principal antecedente la tesis de maestría, *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* (Ferrari, 2001) en la cual nos cuestionamos sobre los significados que deberían incorporarse a la enseñanza de los logaritmos con el objeto de subsanar la brecha entre sus dos presentaciones, la algorítmica y la analítica, fenómeno que llamáramos "dislexia".

En aquella oportunidad, influenciados por la escuela francesa, partimos del hecho, reportado por Trujillo (1995), que la noción logaritmo presenta en el discurso matemático escolar un tratamiento algorítmico rayando en lo axiomático, que inevitablemente deriva en una carencia de significados y un estancamiento en su aprendizaje que lo deja con estatus de proceso en el sentido de Dubinsky (1992), es decir, sin llegar a configurarse como objeto para la mayoría de los estudiantes.

De trabajos como Confrey y Smith (1994 y 1995), Confrey (1998), Lezama (1999), de mi propia tesis de maestría (Ferrari, 2001) y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos lo cual nos lleva, de manera natural, a cuestionar modelos de difusión de conocimientos, concepciones, elementos que siendo útiles en determinados momentos perturban en otros niveles, es decir, devienen en obstáculos epistemológicos, tal el caso de las estructuras multiplicativas para la enseñanza de la potenciación (Confrey y Smith, 1995) y su posterior utilización para implementar la generalización hacia la noción de "función exponencial" y por ende, para la significación de los logaritmos.

Así mismo, Sierpinska (1992) cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición, pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que no hemos encontrado, en el discurso matemático escolar, elementos que permitan el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.

Dubinsky (1991) por su parte, considera que comprender las funciones definidas mediante integrales indefinidas, como en el caso de los logaritmos, constituye un buen ejemplo de encapsulación con internalización. Estimar el área bajo una curva con sumas y pasaje al límite es, en la teoría APOE, un proceso. Los estudiantes que parecen comprender esto, frecuentemente tienen dificultades con el próximo paso, este es, entender que el producto encontrado es una función, algo que varía al modificar el parámetro considerado. Por tanto, se requiere de procesos de "alto nivel" para especificar una función dada por una integral indefinida lo cual puede explicar la complejidad de este proceso y las dificultades que el mismo acarrea a los estudiantes, conceptos éstos muy ligados a la comprensión y manejo del Teorema Fundamental del Cálculo.

En la actualidad, la función logaritmo es una noción cuya vigencia en los planes de estudio está seriamente amenazada, pese a que su carácter de poderosa herramienta matemática es incuestionable. En efecto, ha desaparecido de varias currículas del bachillerato, mismas que la utilizan en materias como física o química en los mismos semestres que obliga a los docentes a implementar estrategias axiomáticas sustitutas o "parches" para su utilización efectiva. Paralelamente a esto, se percibe el desinterés de los profesores de matemáticas, particularmente aquellos que imparten Álgebra (a nivel medio superior) por transmitir esta noción, que es el último tema del programa de estudios que se debe tratar.

Por otro lado, la revisión bibliográfica realizada, en esa oportunidad (Ferrari, 2001), nos permite localizar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1991, 1992), supeditan la construcción del logaritmo al de función y aquellos que, como Confrey y Smith (1995), consideran pertinente problematizar sobre la estructura multiplicativa como forma de introducir la potenciación para de ahí pasar a los logaritmos, misma que subordina la construcción de la función logaritmo a la de función exponencial. Por nuestra parte, cuestionamos la idea que para "comprender" o "internalizar" la noción de una función específica, los logaritmos en este caso, debemos primero haber construido la noción de función, argumento en el que se percibe un desconocimiento de la naturaleza propia de cada función. A su vez, supeditarlos a la estructura multiplicativa conceptualiza a los logaritmos como entes aritméticos. Pensamos por tanto, que una revisión a profundidad de los elementos que podrían propiciar la construcción de la función logaritmo aportaría elementos a la problemática, tan extensa y exhaustivamente abordada en investigaciones de nuestra disciplina, respecto a la estabilización de la noción de función.

Efectivamente, desde nuestra perspectiva cada función posee su propia naturaleza, misma que la distingue de las demás así como de las problemáticas inherentes a la apropiación de cada una. Comprender la noción de $f(x) = x^2$ no es equivalente a la comprensión de $f(x) = \ln x$, apartándonos por tanto de la idea que "saber función" equivale a comprender todas y cada una de las funciones conocidas.

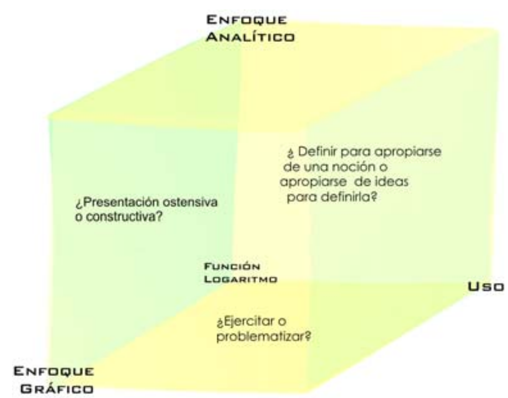
Por ejemplo, Arrieta (2003) sugiere que la apropiación de lo lineal conlleva evidenciar lo cuadrático, como la otredad. Esto nos obliga a caracterizar lo lineal desde una perspectiva que se distingue de la cuadrática o la logarítmica. Si lo hacemos desde lo numérico, diríamos que construyendo tablas donde se juegue con las diferencias de cada variable y su relación observaríamos que la constante emerge en distinto tiempo dependiendo de la función polinómica en juego (lineal en la primera diferencia, cuadrática en la segunda, etc.) en tanto que en la exponencial esa constante no aparece, sólo mantiene su carácter de progresión geométrica, en tanto que la función logaritmo se escapa de este tratamiento. Entremezclar esto con el registro gráfico, el coloquial o el algebraico propiciando su transferencia, evidencia el distinto carácter que conlleva hablar de funciones polinómicas o transcendentes. Sin embargo, es importante enriquecer estos estudios desde la socioepistemología donde nos interesa también poner en relieve las prácticas sociales y las herramientas generadas por ellas y que, a su vez, modifican esas prácticas dándole vida a ciertas nociones ya que nos permite evidenciar la distinta naturaleza de desarrollo y por tanto de apropiación que implican estas nociones.

En este eje de discusión, hallamos trabajos como los de Trujillo (1995), Cantoral y Farfán (2004), Ferrari (2001, 2003, 2004), donde el estudio de las funciones logarítmicas y sus características su fundan en un acercamiento sistémico que podríamos denominar socioepistemológico; o aquellos como los de Confrey et al. (1994, 1995, 1998, 2000), Lezama (1999), Martínez-Sierra (2003, 2006), donde se aborda a la función exponencial bajo acercamientos similares. Ambos focos de investigación nos dotan de elementos para evidenciar la dicotomía respecto al desarrollo del pensamiento funcional.

Es posible entonces, observar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky et al (2003); Tall (1992); Tall y Dubinsky (1991); Vinner (1992); Sierpinska (1992), Carlson et al. (2002) entre otros, buscan un único mecanismo de apropiación de la noción de función, por tanto supeditan la construcción del logaritmo al de función; y, aquellos que, como Arrieta (2003), Martínez-Sierra (2003), Montiel (2005), Cantoral y Farfán (2004), Ferrari (2001) entre otros, reconocemos la importancia de dar cuenta de las características específicas, de "la otredad" (Arrieta, 2003) de las funciones.

Por otro lado, al analizar los aportes que diferentes investigadores nos brindan respecto a los logaritmos observamos que podemos encasillarlos en dos vertientes, pero absolutamente desvinculadas. Encontramos aquellos acercamientos con gran acento en lo cognitivo cuya búsqueda se centra en lograr un razonamiento logarítmico desde el objeto matemático ya aceptado en el ámbito escolar, tales como Kremisnki (1999), Maruszewski (1998), Berndes y Rahn (1994), Vaccaro y Szemruch (2002), Weber (2002); y aquellos con gran acento en lo histórico donde su búsqueda se reduce a comprender las ideas matemáticas antiguas en las que se desarrollaron los logaritmos sin ninguna intención de impactar en la educación, tales como Ayoub (1993), Bagni (1994), Burn (2000 y 2001), Cajori (1913), Gridgeman (1973), Le Goff (1989), Mazzotti (2001), Oliver (2000).

Discurso matemático escolar



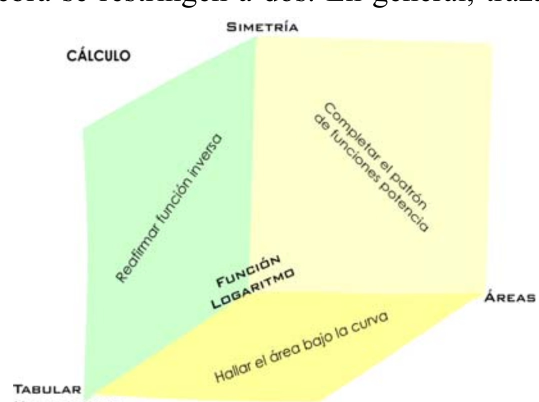
Al realizar nuestro análisis del discurso matemático escolar que se ha generado en la enseñanza-aprendizaje de los logaritmos ahondamos, en primer lugar, en aquellos argumentos que les dan vida en textos que, con frecuencia, son utilizados en el sistema educativo; luego, en aquellos argumentos que utilizan los profesores en su práctica docente; y por último, en aquellas herramientas que utilizan los alumnos al abordar actividades inherentes a los logaritmos.

En Ferrari (2001) encontramos que la presentación escolar de los logaritmos, absolutamente escindida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos, nos estamos refiriendo a su presentación primera como "el exponente al que se debe elevar una base para obtener determinado valor", a su íntima vinculación con las exponenciales "al ser una función inversa de la otra" y por último ser la "respuesta de una integral singular" que se escapa de un patrón, sin olvidar su desarrollo en serie de potencias también presente en el discurso matemático escolar.

Para realizar un análisis de libros utilizados en aulas de hoy, los abordamos inicialmente desde *lo algebraico*, ya reportado en Ferrari (2001), y donde nos centramos en observar el abordaje de los logaritmos fundamentalmente el tipo de conceptos utilizados deseando evidenciar el desarrollo de esta noción desde los textos de siglos anteriores (L'Hopital, 1696; Agnesi, 1748; Euler, 1797; entre otros) hasta nuestros días. Luego, desde *lo gráfico*, en busca de caracterizar su uso y el significado que le otorgan a los logaritmos y, finalmente, abordamos *el uso* de los logaritmos en los libros de textos, entendiéndolo como las actividades que se proponen para caracterizarlos y acercarlos a la realidad, a su utilidad en contextos diferentes al matemático.

Desde *lo algebraico*, en Ferrari (2001) se reporta, a grandes rasgos, el abordaje que a logaritmos y exponenciales se les confieren en distintos niveles escolares. Observamos que, en una primera instancia, los logaritmos aparecen en la currícula del bachillerato enfocados a problemas aritméticos sin dar cuenta de los elementos que permiten, desde nuestra perspectiva, la construcción de la función logaritmo. Efectivamente se hallan, luego de haber sido trabajadas y en forma paulatina, nociones que, a nuestro criterio, pueden ser utilizadas para tal fin. Por otro lado, en cursos más avanzados, se le necesita como una función de la cual sólo se conoce su expresión analítica, su gráfica y la noción de que es la inversa de la función exponencial, sin reparar en su construcción, por tanto, los alumnos la someten a diversas operaciones, como derivar, sin conocer esta función cayendo en una mecanización de algoritmos ya que, aunque la deriven muchas veces, el concepto de esta función no permanece ni se construye.

Desde *lo gráfico*, es interesante observar cómo se reafirman las presentaciones ostensivas de los logaritmos al analizar, dentro del contexto general de los libros escolares, la forma de encarar la construcción gráfica de los mismos. Al igual que en la discusión anterior, sobre su presentación algebraica, es sutilmente distinto el enfoque que se adopta en libros de Álgebra y en los de Cálculo, producto de los distintos fines que ambos cursos persiguen. Los argumentos visuales utilizados en los textos escolares para cursos de Álgebra se restringen a dos. En general, trazan los gráficos a partir de coordenadas cartesianas, tarea que requiere el uso de tablas y/o calculadoras para determinar los puntos a utilizar. En otros textos, aparecen argumentos de simetría, cuyo uso requiere conocer una de las funciones involucradas. Ambos acercamientos asumen la continuidad de estas funciones misma que, la mayoría menciona, se demostrará en cursos posteriores. En definitiva se desea lograr que el lector perciba características de la función logarítmica al observar su gráfica. En los textos utilizados en cursos de Cálculo, en cambio, los argumentos esgrimidos para propiciar un acercamiento gráfico a la función logarítmica se sustentan en tres supuestos: "lo simétrico", al presentar a la función logaritmo y la exponencial en forma conjunta; "lo numérico", que registra

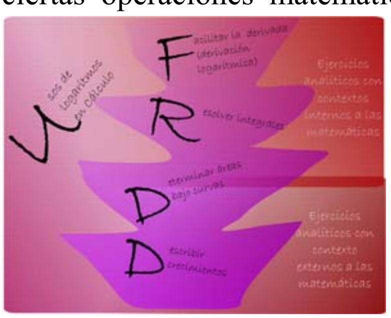


los valores en tablas y analiza derivadas sucesivas, "la cuadratura" que se basa en el área bajo la curva. Estos tres elementos se desarrollan en planos distintos.

Caracterizamos con estos supuestos las actividades que proponen los textos. Así, la simetría con la que se inicia, en general, la discusión de los logaritmos en Cálculo, se continúa con la determinación de áreas bajo curvas constituyendo el plano de completar patrones donde las derivadas e integrales encuentran un fértil campo de desarrollo. En otros acercamientos, en cambio, inician la discusión de los logaritmos construyendo tablas numéricas desde la expresión analítica para confluir en la determinación de áreas bajo curvas, conformando el segundo plano que percibimos. Vemos entonces que ambos planos se desarrollan en distintos ámbitos no conjuntándose en la determinación de los logaritmos.

Desde *el uso,* observamos los ejemplos que se construyen en ciertos libros escolares, para sustentar ideas logarítmicas así como proponer ejercicios y problemas que requieran utilizarlos. Los supuestos que los respaldan o que los generan nos informan, la mayoría de las veces, sobre una tradicional manera de presentar su uso. En los libros de Álgebra, encontramos ejercicios aritméticos, donde facilitar cálculos y resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, es el ámbito más adecuado para el uso de los logaritmos, dentro del contexto matemático. Por otro lado, hallamos ejercicios algebraicos donde se agregan otros elementos, tales como un fenómeno (el crecimiento de bacterias o un temblor), que se puedan describir utilizando los logaritmos. Sin embargo, los problemas que incluyen cierto contexto de otras disciplinas (fenómenos físicos o químicos, por ejemplo) tienen características ostensivas ya que no involucran a los logaritmos en la construcción del modelo involucrado; sino que, el papel de esta noción, generalmente está sujeto a calcular valores más que a reconocer patrones de crecimiento o a modelar el fenómeno.

Por su lado, en los libros de texto de Cálculo, esta noción se articula entorno a su utilidad para ciertas operaciones matemáticas, tales como la derivación y la integración. Encontramos en



general, ejercicios analíticos, donde los entendemos como aquellos que se mueven alrededor de fórmulas, expresiones algebraicas, demostraciones u otras sin mayor relación con fenómenos en cuanto a modelarlos. Se retoma la idea de facilitar cálculos pero aquí, en el ámbito de la derivación. También se les da el carácter de elemento imprescindible en la resolución de ciertas integrales que los involucren ya sea como función primitiva como integrando.

Por otro lado, hallamos ejercicios analíticos con contextos fuera de las matemáticas, pero de una manera ostensiva al igual que en el caso de los textos de Álgebra. Se presenta a los problemas como algo acabado, no para explorar y determinar el modelo involucrado sino, más bien, para aprovechar las virtudes de los logaritmos en la determinación de algún área o el valor de un exponente. Pocos son los problemas que no mencionan, en su texto, la expresión algebraica que debe utilizarse para arribar a la solución.

En otro ámbito, al estudiar el discurso matemático escolar encontramos que varias son las herramientas matemáticas, que profesores y alumnos han desarrollado en su vida escolar, respecto a los logaritmos, que evidencian la compleja apropiación de esta noción. Si preguntáramos a algunos docentes, que imparten el curso de Álgebra en el Bachillerato, sobre sus experiencias en torno a la enseñanza de los logaritmos, escucharíamos que es una noción difícil para los alumnos; que debido a que Álgebra, en sí, es compleja y su programa extenso, demanda más tiempo para transmitir las nociones que conlleva este curso, prefiriendo ahondar en ideas previas al logaritmo. Rara vez logran abordar la enseñanza de los logaritmos pues, en general, son el último tema del programa y una de las nociones que se evita.

Si iniciamos nuestra experiencia desde los recuerdos que, como estudiantes, han guardado respecto a su acercamiento a los logaritmos hallamos que cuando, cómo y con qué se les presentaron los logaritmos en la escuela dio pie a analizar la evolución del papel del profesor, de los recursos didácticos que se utilizan en clase y de los programas. Para lograrlo, formamos tres grupos de discusión con profesores de distintos niveles en Hidalgo, Nayarit y Chiapas, quienes gentilmente se prestaron a compartir sus experiencias como estudiantes y profesores.

Efectivamente, desde la nostalgia de las tablas de logaritmos… *mmm… las tablas de Arquímedes Caballero*[32], que son mencionadas y utilizadas hasta hoy en día por los "veteranos" de la enseñanza de los logaritmos, o desde la idea de que, en los más jóvenes, era una tecla de la calculadora que algunos teníamos, nadie deja de recordar algo de su pasaje por los logaritmos. Tampoco faltó aquél que recordara la regla de cálculo, sobre todo, aquellos que tuvieron una formación ingenieril, y que desarrollaron una destreza para calcular operaciones recorriendo dos reglas graduadas con escala logarítmica.

Los recuerdos sobre: la falta de conexión con la realidad o con otras disciplinas; la forma "abstracta" con la que era presentada; el cultivo de la idea de que ya "era algo escrito que sólo tiene aplicaciones aritméticas", entre otros comentarios, presentes en la discusión escolar de esta noción, no dista mucho de la problemática que enfrentan nuestros alumnos en sus "escasas" clases sobre función logarítmica.

Si reflexionamos con los profesores sobre los cursos, temas y actividades que se relacionan con la vida escolar de los logaritmos, nos reducimos a un pequeño ámbito, el de las matemáticas y, en particular, en álgebra para aquellos que incursionaron en el uso de las tablas logarítmicas como el único medio de realizar ciertas multiplicaciones y por ende, bajo una visión aritmética. En tanto que, aquellos profesores que eran estudiantes de los 80' en adelante, se acercan a ideas funcionales de los logaritmos al hablar de ellos, ya que se refieren a cursos de Cálculo, diferenciales e integrales, donde su pasaje tradicional por álgebra, primer contacto con los logaritmos, no es mencionado.

Este mundo especial, donde confluyen recuerdos y realidades, nos permitió observar la persistencia de las maneras de abordar esta noción matemática en el aula. La invariabilidad que la envuelve, que se respeta sin conflicto, sin preguntas. Es así, que los cuestionamientos de los muchachos siguen siendo los mismos y la evasión a sus respuestas de la mayoría de nosotros también.

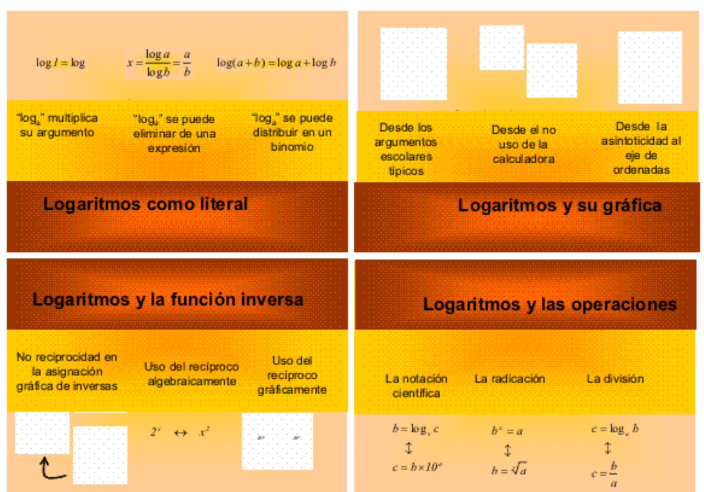
32 Arquímedes Caballero (1918-2004), profesor de matemáticas quien dedicó su vida a la docencia aportando al sistema educativo del país, varios libros como Geometría Analítica y diversos textos escolares, entre ellos las Tablas Matemáticas empleadas por muchas generaciones de estudiantes de educación secundaria

Si le preguntáramos a los docentes que imparten los logaritmos "¿qué cosa no quisieran que les preguntaran sus alumnos?" responderían en general, ¿de donde vienen? ¿Por qué funcionan? ¡Explíqueme!, ya que reconocen su desconocimiento de la naturaleza de los logaritmos y de argumentos que pudieran utilizar en la discusión de este concepto matemático. Esta historia se repite en el nivel superior. Es efímero el tiempo utilizado para definir los logaritmos, en general como función inversa de la función exponencial, y trabajar con ellos para construir un robusto modelo de los logaritmos.

Encontramos así, cierta ambivalencia entre aquellos que presentan y transmiten los logaritmos en sus clases de matemáticas y "contemplan" su complejidad; y, aquellos que los "usan" visualizando una herramienta importante.

Por otro lado, recabamos información sobre los argumentos y herramientas que los alumnos, aquellos que habían transitado el peregrinaje escolar propuesto para el aprendizaje de esta noción, utilizan al enfrentarse a la necesidad de echar mano de los logaritmos.

En la mayoría de los estudiantes, encontramos las frases "no lo recuerdo", "nunca lo vimos en la escuela", ante tareas que explícitamente mencionábamos a los logaritmos. En aquellas actividades en las que era necesario utilizarlos, recurrían a herramientas más conocidas, tales como, las tablas, la ley de distribución, la linealidad, la multiplicación entre literales, la división como argumento de explicación, la reciprocidad. Observamos que las herramientas utilizadas por los estudiantes, reflejan la ausencia de la apropiación de los logaritmos a partir de las actividades que generalmente propone el discurso matemático escolar imperante en las aulas de hoy. Es fugaz la aparición de los logaritmos en las curricula escolares y, más aun lo son, las actividades propuestas a los alumnos que requieran su uso y exploración.



Es necesario además, considerar que existe una gran variedad de herramientas que utilizan los alumnos, aquellas a las que recurren para resolver ciertas actividades y que podríamos incorporarlas en las secuencias dándoles otro enfoque y propiciar un avance en el aprendizaje de las matemáticas en torno a los logaritmos.

Si reunimos las herramientas que se privilegian, se observa de una manera interesante el arraigo a nociones que escolarmente se han trabajado con mayor intensidad. Una de las más recurrentes herramientas matemáticas utilizada es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, lo cual evidencia la aplicación de la linealidad en toda circunstancia, lo que Artigue (1990) llamara *linealidad abusiva*, y la cual no sólo se remite a los logaritmos, sino a toda función involucrada con una suma en su argumento. Esto coloca a los logaritmos como "una partícula log que multiplica todo lo que se le pone adelante", es decir, no se ha desarrollado la idea de argumento funcional, quedando así en un acercamiento operatorio.

Otro rubro interesante para analizar es el uso de la graficación. Nos preguntamos ¿qué argumentos proponen para explicarse el comportamiento de una función, y en particular la logaritmo? Prevalece en sus respuestas la idea de que se requiere de una tabla para esbozar una función, resabio de los acercamientos propuestos en la mayoría de los textos utilizados en clase, así como la no apropiación de la función inversa, elemento importante en la vida de los logaritmos y que en el discurso matemático escolar se los toma como un buen ejemplo de esta noción. La mayoría de los textos discuten la función inversa desde la simetría geométrica de las funciones respecto a la recta $y = x$, siendo extendida en la mayoría de los alumnos a otros tipos de simetrías como la que nos invita a recordarla ante la función recíproca. Estas confusiones tienen su lógica quizás en los distintos sentidos que adoptan las palabras "inversa" y "recíproca" dentro y fuera de las matemáticas.

Es basto e interesante entonces, el análisis de las producciones de los alumnos ante cierto tipo de preguntas y actividades que involucran a los logaritmos y que no se agota en esta primera revisión de ellos.

Un acercamiento epistemológico

En nuestra indagación epistemológica (Ferrari, 2001) concluimos que se pueden distinguir tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si tomamos como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier para su primera definición.

Como primer momento, consideramos a *los logaritmos como transformación*, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda de facilitar engorrosos cálculos producto de las necesidades sociales de la navegación, artillería y astronomía. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentado regresar a la aritmética y, por tanto, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la confluencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de la relación entre ambas surge la definición de los logaritmos. Los elementos matemáticos utilizados son trabajados, en nuestras aulas, desde los niveles iniciales. La búsqueda de patrones numéricos, la relación entre ellos, la economía de recursos para expresar ideas matemáticas son abordados en las currícula y libros de texto actuales, pero no relacionados y utilizados a la hora de introducir los logaritmos.

Su exploración en otros contextos, producida principalmente en el siglo XVII, nos lleva a considerar como segundo momento el de *los logaritmos como modelizadores* pues en esta etapa se determinan sus características geométricas y por tanto logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo marco "algebraico-geométrico" que se estaba desarrollando; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia encontrando otro lenguaje para ser descritos ingresando así en los avatares de un Cálculo en plena gestación; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos a partir de su desarrollo en serie de potencias lo cual les abre las puertas para acceder al discurso matemático del siglo XVIII y adquirir el status de función.

Todos estos argumentos y exploraciones que giran en torno a descubrir las características logarítmicas en distintos contextos mediante el uso explícito de la relación entre progresiones están absolutamente fuera del discurso matemático de nuestros días. Aparece en los libros de difusión de conocimiento del siglo XVII, para desaparecer completamente a partir de las ideas eulerianas y de su vinculación definitiva con las funciones exponenciales mediante el concepto de función inversa.

Comienza así, un tercer momento que nosotros identificamos como la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones dadas anteriormente, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

Surge así, de nuestra indagación sobre el devenir de los logaritmos en objetos de saber, como hipótesis epistemológica, la incorporación en el diseño de las nociones de progresión aritmética y geométrica y su fuerte vinculación con los logaritmos. Creemos que son elementos que pueden resultar útiles, al igual que en el desarrollo histórico de los logaritmos, para facilitar el pasaje desde las características aritméticas de esta noción hasta las funcionales permitiendo la exploración en distintos marcos y su correspondiente vinculación.

Al reflexionar sobre el desarrollo de lo logarítmico, consideramos importante enriquecer nuestra búsqueda de antecedentes históricos en dos direcciones, pero ambas alrededor de aquellas herramientas construidas vinculadas con las relaciones entre progresiones geométricas y aritméticas.

En nuestra primera síntesis, los argumentos que hemos hallado en aquellos pueblos y épocas que hemos seleccionado, reflejan la necesidad de facilitar las operaciones numéricas constituyéndose en una práctica social, respondiendo a requerimientos culturales. Aquellas actividades que reflejan la vida y el desarrollo cultural de las civilizaciones como la babilónica, la egipcia, la china y la inca que miramos desde la antigüedad hasta la conquista, desviando un poco nuestra vista de lo europeo, nos permiten vislumbrar la construcción de herramientas, en este caso, el uso de la relación entre progresiones aritméticas y geométricas que confluyen en distintos artefactos, tales como: las tablas, la yupana, el ábaco, patrones numéricos, la regla de cálculo, y en otros que indudablemente quedaron en el tintero de este primer acercamiento.

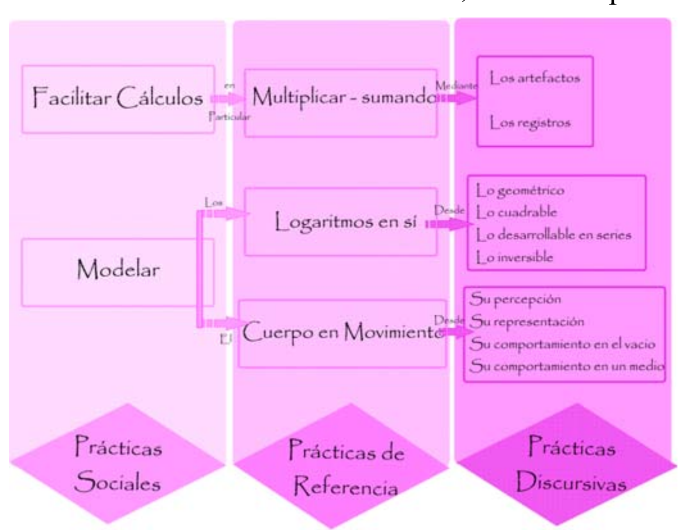
La necesidad de facilitar cálculos se entremezcla con la de registrar los avances, las discusiones, asegurar la transmisión de los conocimientos que se iban gestando y consensuando. Así, pese a la rapidez de la mirada que hemos realizado en un mundo imposible de abarcar, logramos vislumbrar cómo “lo logarítmico” se va desarrollando a la mano de establecer formas de escribir matemáticamente, de mecanizar procesos laboriosos como el de multiplicar, de ordenar en columnas la relación entre ciertos valores, de reconocer ciertos crecimientos aunque no se haya percibido la covariación logarítmica que desde nuestra perspectiva está presente.

Así, la primera síntesis de cálculos implicó evitar la suma reiterada dando lugar a la multiplicación. Regresamos ahora a la suma con un isomorfismo complejo entre el mundo de multiplicar y el de sumar que nos permite evitar la multiplicación reiterada mediante la suma directa. Aparecen así, aquellas ideas matemáticas de lápiz y papel tales como jugar vinculando dos progresiones o aquellas mecánicas como la yupana, el ábaco, la regla de cálculo que nos permiten dar respuestas ingeniosas a la complejidad de multiplicar. O, por otro lado, aquellas formas de registrar tales como tablas, quipus, papiros, libros o calculadoras que nos permitan “abaratar el costo” de calcular, y ahorrar la tediosa tarea de repetirlos, generando otras actividades.

Sin embargo, no sólo en facilitar cálculos encontramos la producción de artefactos, sino también en aquellos que responden a la necesidad de modelar, es decir, de describir con ciertos elementos. Varios trabajos se ocuparon de estudiar la idea de “predecir” (Cantoral, 1990 y 2004 o Buendía, 2004) donde el estudio del movimiento fue una práctica de referencia insoslayable. Nuestra visión de la misma, nos lleva a pensar covariacionalmente, es decir, mirar el movimiento de los cuerpos desde la relación entre progresiones. Sin embargo, también nos interesó estudiar las respuestas que los logaritmos daban a las exigencias de la propia comunidad de matemáticos, a veces por el simple hecho de explorar las propiedades numéricas o extenderlas; a veces, por completar patrones, a veces, por tener mayor precisión en los cálculos; a veces, por linealizar; es decir, modelar a los logaritmos.

Por otro lado, en Ferrari (2001) nos ocupamos en reflexionar sobre cómo los logaritmos fueron resistentes a todos los avatares científicos a los que los sometían, a las exigencias para permanecer en el lenguaje matemático. Hallar cabida en una época donde dominaban acercamientos geométricos (Descartes y Agnesi); o a las exploraciones matemáticas (Mersenne, Mercator), o a la búsqueda de completar patrones de cuadraturas (Fermat, Saint, Vincent); o también, a ser considerados una función por hallar desarrollo en potencias, características fundamentales de la matemática de Euler; entre otros elementos vinculados con los logaritmos, enfrascándonos en modelar a los propios logaritmos.

Hablamos así, de dos prácticas que nos interesan, la de *facilitar cálculos* y por ende de la generación de herramientas de distinta índole por una lado, y por otro, la de modelar, particularmente de las ideas desarrolladas por: Aristóteles, Oresme, Bradwardine, Galileo, Newton y Huygens, todos ellos preocupados por lo que hoy conocemos como física y que aportan al desarrollo de lo que se ha dado en llamar *matematizar la naturaleza,* como subproducto de la práctica social que denominamos *modelar*.



Conclusiones

Hablamos entonces de prácticas sociales como generadoras de herramientas, que nos permitan generar conocimiento y construirnos modificándolas y modificándonos. Hablamos de práctica de referencia, como reflejo de usos y contextos, de ámbitos en donde se desarrollan y nos desarrollamos. Y, por último, hablamos de prácticas discursivas, como generadores de argu-mentos y significados. La posibilidad de entremezclarlos, donde unas prácticas contienen a otras, se autocontienen, y son contenidas, donde no nos interesa conocer donde inician o donde terminan, sino que sólo nos interesa reflejarlas en nuestros diseños en búsqueda de que Lo logarítmico surja de y con todas ellas. Se requiere entonces, que los logaritmos sean usados, formulados y teorizados para construirse y existir.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(2-3), 241-286.

Ayoub, R. (1993, abril). Whats is a Napierian Logarithm? *The American Mathematical Montlhy 100*(4), 351-364.

Bagni, G. T. (1994). Una "controversia" della matematica del Settecento i logaritmi dei numeri negativi. *Periodico di Matematiche VII,* 2(2/3), 95-106. Disponible en: http://www.syllogismos.it/history/Loganeg.pdf. Consultada en octubre de 2005.

Berndes, A. y Rahn, J. (1994). Using logarithms to explore power and exponential functions. *The mathematics teaching 87*(3), 161-170.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Burn, B. (2000). Gregory of St. Vincent and the rectangular hyperbola. *The Mathematical Gazette 84* (501, noviembre 2000). The mathematical Association. 480-485.

Burn, R. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logaritmos. *Historia Mathematica 28*, 1-17. Disponible en: *http://www.idealibrary.com.* Consultada en octubre de 2005

Cajori, F. (1913). History of the Exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly XX*(2), 35-47.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de "el Praediciere" y "lo Analítico"*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité á la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24*(2-3), 137-168.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(5), 352-378.

Confrey, J. (1998). Building mathematical structure within a conjecture driven teaching experiment on splitting. En: S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K.

Norwood y L. Stiff: *Proceeding of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XX. October 31-November 3, 1998. North Carolina State university. Raleigh, North Carolina USA. USA: Eric.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Estudies in Mathematics* 26, 135-164.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in mathematical thinking. En: D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht; USA: Kluwer.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992) (Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Mathematical Association of America, Washington, DC, USA: MAA Notes 25.

Dubinsky, E. y MacDonald, M.A. (2003). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En: D. Holton et al. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (pp.275-282). USA: Kluwer Academic Publishers.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). México.

Ferrari, M. (2003). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo En: J. R. Delgado (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática educativa.* Volumen 16 – Tomo 1 (pp. 61-67). Chile: Clame

Ferrari (2004-a). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En: L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática educativa.* Volumen 17 – Tomo 1 (pp. 45-50). México: Clame

Gridgeman, N. T. (1973). John Napier and the history of logarithms. En: A. Gelbart (Ed.), *Scripta Mathematica. A Quartely Journal*. New York. EE.UU.: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University

Kreminski, R. (1999). Estimating logarithms with college algebra students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 30*(2), 197-206.

Le Goff, J. (1989). De la méthode dite d´exhaustion: Gregoire de Saint Vincent (1584-1667). En Irem de Besancon (Ed.), *La démonstration mathématique dans l´Histoire.* (pp. 197-220). Actas du 7mo Éme colloque Inter-Irem Épistemologie et histoire des mathématiques.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, (Cicata-IPN), México

Martínez-Sierra, G. (2006) Los procesos de convención matemática constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio: el caso de las funciones elementales. En: G. Martinez-Sierra (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*(1), (pp. 745–751). México: CLAME, versión digitalizada. Disponible en http://clame.org.mx/. Consultada en julio de 2006.

Maruszewski, R. (1998). Computing logarithms in parallel. *Mathematics and computer education 32*(2), 127-133.

Mazzotti, M. (2001). Maria Gaetana Agnesi. Mathematics and the Making of the Catholic Enlightenment. *The History of Science Society 92*, 657-683.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN(Cicata-IPN), México.

Oliver, J. (2000, Noviembre). The Birth of logarithms. *Mathematics in school,* 9–13.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Function, limits, infinity, and proof. En: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematical teaching and learning* (pp.495-511). New York: MacMillan Publishing Company.

Tall, D. y Dubinsky, E. (1991). Mathematical thinking and the computer. En: D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). México.

Vaccaro, D. y Szemruch, A. (2002). Logaritmos, física y algo más. En: C. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol 15. Tomo 1. (pp. 14-19). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp.195-213). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Weber, K. (2002). Developing students' understanding of exponents and logarithms. En D. Mewborn, P. Sztgjn, D. White, H. Niegel, R. Bryant y R. Nooney: *Proceeding of the 24th Annual Meeting, North American Chapter of the International Grupo for the Psychology of Mathematics Education. Vol 1* (pp.1019-1027). Athens, Georgia. ERIC.

SITUACIÓN DE MODELACIÓN EN FENÓMENOS FÍSICOS EN CONTEXTO DE INGENIERÍA CIVIL POR MEDIO DE LA INTERPOLACIÓN Y PREDICCIÓN

Hipólito Hernández , Gabriela Buendía
Cimate, Facultad de ingenieria, Univesrsidad Autónoma de Chiapas
polito_hernandez@hotmail.com, Buendiag@hotmail.com
Experiencia de aula (Cartel)

Resumen

En esta investigación se contextualizaron fenómenos físicos y propios de ingeniería civil, como: la variación de la velocidad, variación de temperatura, movimiento periódico, e infiltración de agua en suelos. Los primeros dos fenómenos se presentaron como enunciado de salón de clase y los dos últimos se realizaron mediciones a través de un sensor de movimiento, en la infiltración de agua de un suelo determinado, se obtuvo la medición de la variación de la columna de agua con respecto al tiempo. Las situaciones fueron abordadas a través de la práctica social de la predicción y la herramienta de interpolación para la modelación matemática. Esta forma de ver a la matemática consideramos que está proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar.

Palabras claves: Situación, interpolación, predicción, práctica social, modelación matemática

Introducción

En este trabajo se abordaron contextos físicos y de ingeniería civil, a través de la práctica social de la predicción y la interpolación bajo una socioepistemología de prácticas (Cantoral, 2001). Hernández (2006) ha reportado aspectos de la emergencia de la interpolación y de la predicción en forma implícita desde los estudios del movimiento de los cuerpos por los filósofos del colegio de Merton, los estudios hechos por Oresme, hasta el estudio del movimiento realizado por Galileo. En esta época surge la noción de modelación, graficación y esto da origen a la matematización del movimiento. La interpolación y predicción aparecen en forma explícita en el marco epistémico de Newton puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Muñoz, 2000; Hernández, 2003). La matematización del sistema genera construcción de herramientas como el binomio de Newton y la serie de Taylor. Por otra parte, Buendía (2005) reporta un estudio socioepistemológico sobre la práctica de predicción como generadora de conocimiento para los fenómenos periódicos.

Se trabajaron situaciones que involucran la interpolación y la predicción en el caso de: Movimiento uniformemente acelerado, variación de temperatura, movimiento periódico y la infiltración de agua en un suelo determinado. Para registrar las mediciones de los experimentos de movimiento periódico, se utilizaron equipos electrónicos como sensores de movimiento conectados a través de una calculadora graficadora. En todos los experimentos se utilizó la herramienta de interpolación y la práctica social de predicción para la modelación matemática. De esta forma se recaba información con respecto a la forma de construcción del conocimiento a través de situaciones diseñadas en contextos físicos y problemas de ingeniería civil. Estas construcciones nos proporcionan elementos de análisis para posteriormente ser presentadas a los estudiantes como experiencias de aprendizaje. Ello proporciona elementos para un cambio epistemológico del Cálculo escolar a través de una visión de Newton-Taylor considerando las prácticas de la predicción e interpolación como reorganizadores del Cálculo escolar.

Epistemología del binomio de Newton y la serie de Taylor

Cantoral (2001) menciona que el proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables. Precisa el reconocimiento de los procesos de predicción de corto alcance (la variación del movimiento local) y la predicción de largo alcance (estudio de la variación del movimiento global). El movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen, entonces, herencia: el estado ulterior $P+PQ$ del fenómeno de variación $P \rightarrow P+PQ$ depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto P y la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de la predicción asociada con la variación y cambio en la naturaleza: PQ es la variación de la variable independiente.

Con esta idea y en la necesidad de predecir, conocer, adelantar, Newton estableció el binomio que hoy en día lleva su nombre y fue dado como:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc \qquad (1)$$

Donde:

$$A = P^{m/n}, \quad B = \frac{m}{n}AQ, \quad C = \frac{m-n}{2n}BQ, \quad D = \frac{m-2n}{3n}CD$$

Si el exponente *m/n* es un número entero no negativo, entonces el binomio de Newton es una serie finita. Si el exponente *m/n* es un número fraccionario o un número negativo entonces el binomio de Newton es una serie infinita.

Según, Edward (1980) en su texto de historia de desarrollo del cálculo, Taylor en su Methodus incrementarum publica su serie y lo obtiene a partir del argumento basado en la fórmula de interpolación de Gregory-Newton. Propone entonces la interpolación:

$$y = y_0 + k\Delta y_0 + k(k-1)/2\Delta^2 y_0 + k(k-1)(k-2)/6\Delta^3 y_0 + ... + k\Delta^{k-1} y_0 + \Delta^k y_0. \qquad (2)$$

Donde los coeficientes de la ecuación (1) corresponden a los coeficientes de la ecuación considerando que $k = \frac{x-x_o}{\Delta x}$. En esencia, Taylor consideró a partir del polinomio de interpolación el siguiente proceso: $x = x_o + k\Delta x; k = \frac{x-x_o}{\Delta x}$, y tomando a la variación de la variable independiente muy pequeña $(\Delta x \rightarrow 0)$, k muy grande, x fija, llegó a construir la siguiente serie:

$$y = y_0 + (x-x_0)\,\dot{y}_0/\dot{x}_0 + (x-x_0)^2\,\ddot{y}_0/2(\dot{x})^2 + (x-x_0)^3\,\ddot{y}_0/6(\dot{x})^2 + \dots \qquad (3)$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis, el binomio de Newton y la serie de Taylor son instrumentos de predicción en un contexto de variación.

Aspectos metodológicos

Este trabajo de investigación se realizó a través de la aproximación socioepistemológica, teniendo en cuenta las prácticas sociales como actividad humana y generación de conocimiento matemático.

El corte metodológico que guía el diseño de situación en la presente investigación es primeramente con un análisis a priori como primera etapa de la ingeniería didáctica, en un trabajo posterior se realizará la puesta en escena como segunda etapa y un análisis a posteriori como tercera etapa. Partimos de la epistemología inicial planteada acerca del binomio de Newton y la serie de Taylor como marco de referencia para el diseño de la situación donde la práctica de predicción es incorporada intencional.

Resultados de un análisis a priori de situaciones

En este apartado presentamos los resultados de los cuatro fenómenos explorados y en cada una de ellos presentamos un análisis, los dos primeros se presenta como situaciones de enunciado de salón de clase y los dos últimos como situaciones a priori con las observaciones experimentales.

Situación 1. Movimiento Uniformemente Acelerado

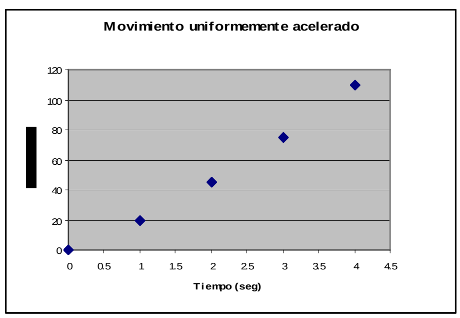
La finalidad de esta situación es mostrar que la predicción y la interpolación están relacionadas mutuamente. Partimos de un ejemplo tradicional de movimiento uniformemente acelerado del texto de física (Benson, 1999) que se recomienda en los cursos de física escolar actual. Con base a esta idea podemos hacer experimentos con dispositivos electrónicos, donde un cuerpo se mueva con velocidad constante y un cuerpo que se mueva con velocidad variable pero con aceleración constante, para obtener las velocidades y posiciones posteriores a través de la predicción e interpolación

Suponga que la velocidad de un automóvil es de 20 m/seg, que durante un tiempo ha aumentado hasta 40 m/seg y que necesita 4 segundos para ir de la posición A hasta la posición B ¿Qué aceleración tiene? ¿Cuáles son las velocidades y posiciones del automóvil para 1, 2, 3, 4 segundos?

En la tabla No. 1 y en la gráfica No. 1 se obtienen los resultados de tiempo y distancia para cada segundo. Estos valores son obtenidos de la interpolación basada en el binomio de Newton.

t (s)	S (m)	Δs	$\Delta^2 s$
$t_o = 0$	$s_o = 0$	$v_o = 20$	$= 5$
$t_o + \Delta t = 1$	$S_1 = 20$	$v_1 = 25$	5
$t_o + 2\Delta t = 2$	$S_2 = 45$	$v_2 = 30$	5
$t_o + 3\Delta t = 3$	$S_3 = 75$	$v_3 = 35$	5
$t_o + 4\Delta t = 4$	$S_4 = 110$	$v_4 = 40$	

Tabla No. 1



Gráfica No. 1

Con base a los resultados de la tabla No. 1. Construimos el binomio de Newton:

$s_2 = s_1 + v_1 \Delta t$, sustituyendo $s_1 = s_0 + \Delta s_0$ y $v_1 = \Delta s_0 + \Delta^2 s_0$

$$s_2 = s_1 + v_1 \Delta t = s_o + 2\Delta s_o + \Delta^2 s_o = (1+\Delta)^2 s_o \qquad (4)$$

El polinomio de interpolación de Newton (ecuación 4) es de segundo grado. Para nuestro problema el polinomio de interpolación de Newton-Gregory es:

$$s_2 = (1+\Delta)^2 s_o = s_0 + k\Delta s_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 s_0 \qquad (5)$$

Donde consideramos, $t_k = t_o + k\Delta t; k = \frac{t_k - t_o}{\Delta t}$ (6)

Entonces $k = \frac{t - t_0}{\Delta t} = \frac{t-0}{1}$, sustituyendo k, $\Delta s_0 = 20$, $\Delta^2 s_0 = 5$ en la ecuación (8) se llega a la ecuación cuadrática, en la cual se tiene una relación funcional de distancia y tiempo.

$$S(t) = \frac{35}{2}t + \frac{5}{2}t^2 \qquad (7)$$

Usando la ecuación (7), para los tiempos 1, 2, 3, 4, segundos respectivamente, obtenemos: S (1 seg) = 20 m, S (2 seg) = 45 m, S (3 seg)= 75 m, S (4 seg)= 110 m.

En este ejemplo, mostramos el modelo matemático que describe el movimiento enunciado y por medio de la tabla de valores del movimiento y sus diferencias que representan las variaciones del movimiento y llegar a predecir la velocidad, la posición en determinado tiempo, con el binomio de Newton.

Situación 2. Variación de temperatura

La situación de variación de la temperatura presentada es con la finalidad de comprobar como actuaría la práctica social de predecir y la herramienta de predecir para verificar la ley de enfriamiento de Newton cuyo enunciado dice "la variación de la temperatura de un cuerpo con respecto al tiempo es directamente proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo y la temperatura del medio ambiente" y a la vez conocer su modelo matemático que describe este fenómeno físico. En la actualidad en los textos de ecuaciones diferenciales este fenómeno es representado con la ecuación diferencial:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[T(t) - T_m]$$

En el trabajo de Hernández (2006) reporta que por medio de la interpolación como herramienta y predicción como práctica social y las diferencias finitas, se llega a obtener el polinomio de interpolación de Gregory – Newton para el fenómeno de la temperatura. Considerando una temperatura inicial (condiciones iniciales) y por medio de las diferencias finitas obtenemos, las primeras, segundas, n – enésima diferencias finitas variables se obtiene el siguiente polinomio de interpolación:

$$T_n = (1+\Delta)^n T_0 = T_0 + n\Delta T_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 T + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 T_0 + etc.$$

Considerando que $t_n = t_0 + n\Delta t, t_n - t_0 = n\Delta t, n = \frac{t_n - t_0}{\Delta t}$ y Δt muy pequeño ($\Delta t \to 0$), y cuando

$n \to \infty$, $t_n = t$, obtenemos que

$$T_n = T_m + (T_0 - T_m) + k(T_0 - T_m)\frac{(t-t_0)}{1!} + k^2(T_0 - T_m)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + k^3(T_0 - T_m)\frac{(t-t_0)^3}{3!} + etc$$

Esta ecuación es la solución de la ecuación diferencial de la ley de enfriamiento de Newton, vista como los procedimientos desarrollados en el polinomio de interpolación a la serie de Taylor, donde consideramos como elemento de análisis la práctica social de predecir, la herramienta de la interpolación en el contexto de la variación de la temperatura. En consecuencia proponemos el siguiente problema que viene enunciado en (Zill, 1993).

Una taza de café cuya temperatura es de 85º C se deposita en un cuarto cuya temperatura es de 18º C. Dos minutos más tarde la temperatura del café es de 80º C. ¿Cuál es la temperatura Después de seis segundos y tres segundos?

Podemos responder a estas preguntas con el binomio de Newton de tercer grado:

$$T_1 = T_0 + \Delta T_0 = 85 - 5.00259 = 79.99741$$

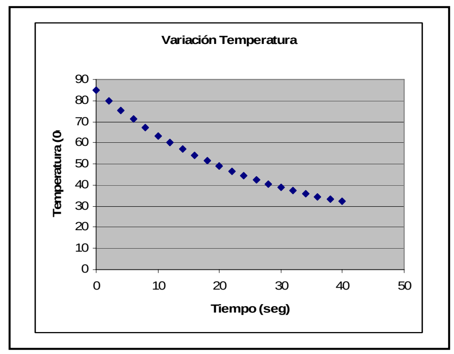
$$T_2 = T_0 + 2\Delta T_0 + \Delta^2 T_0 = 85 + 2(-5.00259) + 0.37359 = 75.3684$$

$$T_3 = T_0 + 3\Delta T_0 + 3\Delta^2 T_0 + \Delta^2 T_0 = 85 + 3(-5.00259) + 3(0.373599 + (-0.0279) = 71.018505$$, etc.

Se sigue el mismo procedimiento usando el polinomio de interpolación de Newton de grado mayor para determinar la temperatura para cualquier tiempo (tabla No.2 y en la gráfica No.2).

t(tiempo)	T(temperatura)	ΔT	$\Delta^2 T$	$\Delta^3 T$	Etc.
0.00000	85.00000	-5.00259	0.37359	- .02795	
2.00000	79.99741	-4.62907	0.34564		
4.00000	75.36834	-4.28343			
6.00000	71.08491	-3.96362			
8.00000	67.12129				
Et…					

Tabla No. 2. Variación de temperatura



Gráfica No.2

O bien usando el polinomio de interpolación de tercer grado podemos obtener el valor de la temperatura para cualquier valor del tiempo del intervalo [0,6].

$$T_n = (1+\Delta)^n T_0 = T_0 + n\Delta T_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 T + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 T_0 + etc.$$

Haciendo $n = \frac{6-0}{2} = 3$

$$T_n = (1+\Delta)^3 T_0 = 85 + 3(-5.00259) + \frac{3(2)}{2!}(0.37359 + \frac{3(2)(1)}{3!}(-0.02795) + etc. = 71.08505$$

La temperatura para, t=3segundos, $n=\frac{3-0}{2}=1.5$

$$T_n=(1+\Delta)^3T_0=85+1.5(-5.00259)+\frac{1.5(1.5-1)}{2!}(0.37359+\frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)}{3!}(-0.02795)+etc.$$

$=77.637958$

En la interpolación de Newton de grado n se requiere que se utilice $n+1$ puntos para una mejor predicción en la interpolación. Desde el punto de vista de predicción se necesita conocer la condición inicial y sus variaciones.

Situación 3. Movimiento periódico

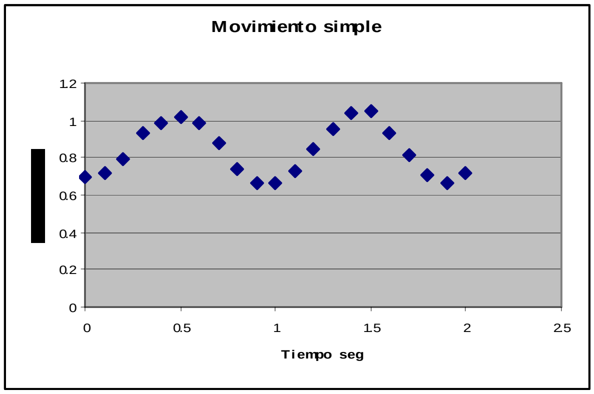
Se diseño un experimento de un resorte en movimiento libre con la finalidad de generar un movimiento periódico, en este experimento se consideró un resorte unido con un objeto y un sensor de movimiento para registrar los datos del tiempo y desplazamiento del fenómeno, además de una calculadora ClassPad para graficar y hacer las primeras, segundas, terceras, cuartas diferencias, etc., como se muestra en la tabla No.3, y la gráfica No. 3. El objetivo de este diseño es con la finalidad de:

a) Verificar el movimiento periódico.
b) Analizar las primeras, segundas, terceras, etc. diferencias y discutir su comportamiento
c) Graficar los datos registrados del tiempo y desplazamiento y discutir su comportamiento en cuanto a su periodicidad a partir de la predicción
d) El uso del binomio de Newton como herramienta de interpolación para predecir el desplazamiento en un tiempo de 7.8 segundos.

No. Datos	t	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	Ect.
1	0	0.7009	0.0209	0.0523	0.0104	-0.156	
2	0.1	0.7218	0.0732	0.0627	-0.146	0.2092	
3	0.2	0.795	0.136	-0.083	0.0628	-0.104	
4	0.3	0.931	0.0523	-0.02	-0.041	0.0316	
5	0.4	0.9833	0.0314	-0.062	-0.01	0.0521	
6	0.5	1.0148	-0.031	-0.073	0.0418	0.0418	
7	0.6	0.9833	-0.104	-0.031	0.0836	-0.052	
8	0.7	0.8787	-0.136	0.0523	0.0314	-0.041	
9	0.8	0.7427	-0.083	0.0837	-0.01	-0.02	
10	0.9	0.659	0	0.0732	-0.0311	-0.02	
11	1	0.659	0.0732	0.0418	-0.052	0.0418	
12	1.1	0.7323	0.115	-0.01	-0.01	-0.041	
13	1.2	0.8473	0.1046	-0.02	-0.052	0.00025	
14	1.3	0.952	0.0837	-0.073	-0.052	0.1775	
15	1.4	1.0357	0.0104	-0.125	0.1253	-0.114	
16	1.5	1.0461	-0.115	-0.00004	0.0104	0.0313	
17	1.6	0.931	-0.115	0.0104	0.0418	0.0209	
18	1.7	0.816	-0.104	0.0523	0.0627		
19	1.8	0.7113	-0.052	0.115			

20	1.9	0.659	0.0627
21	2	0.7218	
Etc.			

Tabla No. 3. Movimiento de un resorte



Gráfica No. 3

Con el binomio de Newton como herramienta se predice el valor del desplazamiento para un tiempo de 7.9 segundos.

$$y(t_k) = (1+\Delta)^k y_0 = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + $$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 y_0 . + etc$$

$$y(7.9) = 0.7009 + 0.79(0.0209) + \frac{0.79(0.79-1)}{2!}(0.0523) + \frac{0.79(0.79-1)(0.79-2)}{3!}(0.0104) +$$

$$+\frac{0.79(0.79-1)(0.79-2)(0.79-3)}{4!}(-0.156). + .. = 0.69979$$

Considerando que $\begin{matrix} t_k = t_o + k\Delta t \\ k = \dfrac{t_k - t_o}{\Delta t} \end{matrix}$, $k = \dfrac{7.9-0}{10} = 0.79$

En los intervalos [0,0.9], [1,1.9], [2,2.9],…, [7,7.9] los datos y la gráfica son periódico, con estos procesos se puede predecir un movimiento periódico a través de de la predicción e interpolación, además en el análisis de los datos nos proporcionan información de conceptos de cálculo.

Situación 4. Proceso de infiltración de agua en suelos

El problema consiste en la infiltración de agua a través de la superficie del suelo y hacia adentro del mismo, producido por las fuerzas gravitacionales y capilares. La diferencia entre el volumen de agua que llueve en una cuenca y el que escurre por su salida recibe el nombre de pérdidas, debido a la infiltración y vaporización. La infiltración juega un papel importante en la relación lluvia y escurrimiento y, por lo tanto, en los problemas de diseño y predicción asociados a la dimensión y operación de obras hidráulicas.

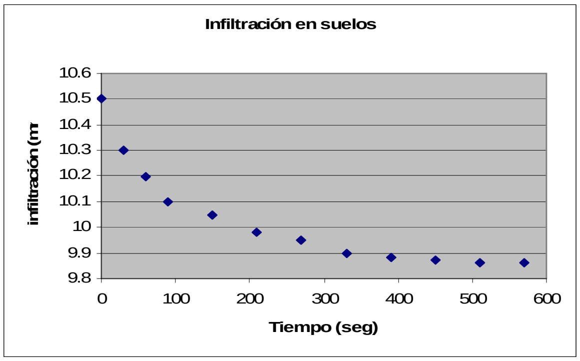
La fórmula más conocida para este fenómeno es la llamada de Horton reportada por Gardner y Widdstoe (1921) y por Horton (1940). $f_p = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt}$. Donde f_p es la capacidad de infiltración y f_0, f_c y k son constantes empíricas.

En el siguiente experimento es con la finalidad de llegar a la modelación matemática del fenómeno de infiltración de agua en suelos, para ello se realizaron mediciones de la infiltración de agua (penetración de la profundidad) de un suelo arenoso los datos forman una gráfica con tangentes de pendiente negativa (ver gráfica No. 4) estas tangentes negativas se muestran en las primeras diferencias en la tabla No. 4, también en la tabla muestran las diferencias de orden mayor y se observa que las variaciones no son constantes, es decir, tiene un comportamiento de forma exponencial con pendientes negativas tendiendo a un valor constante de f_c llamado constante de saturación. De los datos obtenidos del experimento de infiltración de agua en suelos se utilizó la herramienta de interpolación y la predicción para la modelación matemática con la finalidad de predecir la infiltración de agua en un suelo con respecto a un tiempo determinado (tabla No. 4 y en la gráfica No.4). Esta forma de ver a la matemática consideramos que se están proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar (Hernández, 2006).

Proceso de infiltración de agua en suelos

t(s)	h(mm)	Δh	$\Delta^2 h$	$\Delta^3 h$	$\Delta^4 h$	$\Delta^5 h$
0	10.5	-0.2	0.1	-0.1	0.15	-0.27
30	10.3	-0.1	0	0.05	-0.12	0.25
60	10.2	-0.1	0.05	-0.07	0.13	-0.25
90	10.1	-0.05	-0.02	0.06	-0.12	0.23
150	10.05	-0.07	0.04	-0.06	0.11	-0.18
210	9.98	-0.03	-0.02	0.05	-0.07	0.08
270	9.95	-0.05	0.03	-0.02	0.01	0.01
330	9.9	-0.02	0.01	-0.01	0.02	
390	9.88	-0.01	0	0.01		
450	9.87	-0.01	0.01			
510	9.86	0				
570	9.86					

Tabla No. 4. Proceso de infiltración de agua en suelos



Gráfica No.4.

Con el binomio de Newton en la forma de interpolación se llega a predecir la infiltración de agua en tipo de suelo, como se muestra en el siguiente cálculo.

$$h(t_k) = (1+\Delta)^k h_0 = h_0 + k\Delta h_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 h_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 h_0 +$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 h_0 . + etc$$

$$h(150) = 10.5 + 5(-0.2) + \frac{5(5-1)}{2!}(0.1) + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(-0.1)$$

$$+\frac{5(4-1)(5-2)(5-3)}{3!}(0.15) + etc.. = 10.25mm$$

Considerando que $t_k = t_o + k\Delta t$, $k = \dfrac{t_k - t_o}{\Delta t}$, $k = \dfrac{150-0}{30} = 5$

Conclusiones

En la situación de movimiento uniformemente acelerado y la variación de la temperatura únicamente se presentaron con la finalidad de mostrar la relación de la predicción y la interpolación para diseñar situaciones como la presentada en el caso del movimiento periódico, infiltración de agua en suelo, estas situaciones sólo se presentaron como un análisis a priori, en trabajos posteriores se reportará la etapa de puesta en escena. En este trabajo se utilizó la herramienta de interpolación y la predicción como práctica social para la modelación matemática y en el análisis nos dan evidencias de la predicción en los fenómenos físicos y problemas de ingeniería. Esta forma de ver a la matemática consideramos que se están proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar.

Referencias Bibliográfica

Benson, H. (1999). *Física Universitaria*. Editorial CECSA, vol. I. México.

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). *Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study.* Educational Studies in Mathematics 58, 299-333.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Hernández, H. (2003). *Una epistemología de la matematización del movimiento: caso de predicción y variación con las diferencias finitas y la serie de Taylor.* Acta latinoamericana de matemática educativa 16(2), 594-600.

Hernández, H. (2006). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Chiapas. México.

Muñoz, G. (2000). *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2), 131-170.

Gardner, W., Widstoe, J. (1921). *The movement of soil moisture.* Soil Sci. 11:215-232.

Horton, R. E. (1940). *An approach to the physical interpretetion of infiltration capacity.* Soil Sci. AM. Proc. 5, 399-417.

Zill, D. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamérica. Tercera edición. México.

PRÁCTICAS SOCIALES ASOCIADAS AL ESTUDIO DEL USO DE LAS GRÁFICAS: UNA SOCIOEPISTEMOLOGÍA PARA LA MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO[33].

Liliana Suárez, Francisco Cordero
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
lsuarez@cinvestav.mx

Resumen

En la perspectiva socioepistemológica se estudia el 'uso del conocimiento matemático' a través de distintas dimensiones de construcción que se articulan a través de los elementos del funcionamiento y de la forma del contenido matemático. En particular, en este proyecto de investigación, se estudia la modelación escolar para formular una epistemología que integra diversos elementos de construcción que relacionan el uso de las gráficas con la modelación de las situaciones de movimiento. Algunos de estos elementos son la identificación de patrones gráficos, la generación de una estructura de graficación propia y la identificación de múltiples realizaciones (simulaciones del movimiento) y ajustes en la estructura de estas realizaciones para producir gráficas deseables. En este escrito haremos una revisión de los trabajos que estudian las prácticas sociales asociadas al uso de las gráficas como objeto de estudio en matemática educativa con el propósito de ubicar el estudio del uso de las gráficas que se presenta al modelar situaciones de movimiento.

Palabras clave: modelación, uso de las gráficas, estudio del movimiento, prácticas sociales.

Introducción al estudio del uso de las gráficas

En la mayoría de los estudios por la graficación hay un interés por la relación de la representación algebraica y la representación gráfica que deben articularse, entre otras representaciones más, para construir y definir conjuntamente el concepto de función. En la mayor parte de ellos es esencial la incorporación del uso de recursos tecnológicos como computadoras y calculadoras. Una mirada a la investigación anterior realizada se puede encontrar estudios de graficación de tres tipos, cognitivos, didácticos y semióticos. En estos estudios las categorías de análisis se refieren a las dificultades de los estudiantes (Leinhard et al 1990), a estrategias didácticas (Hartmann y Choppin, 2003) y a registros de representación (Duval, 1995), respectivamente. A continuación haremos una discusión sobre cómo cambia el objeto de estudio dentro de una perspectiva socioepistemológica en el que se propone un estudio 'del uso del conocimiento' articulando las dimensiones de construcción a través de los elementos del funcionamiento y de la forma del contenido matemático.

De esta manera, el objetivo de estudiar la graficación está determinado por intereses de las líneas de investigación sobre el Cálculo y el Análisis. En estas líneas se ha identificado a la graficación como un aspecto fundamental en la construcción de conocimiento matemático.

Por ejemplo, Cantoral y Farfán (1998) precisan que para desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional conviene considerar un universo de formas gráficas enlazadas a la noción de predicción en fenómenos de variación continua:

[33] Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto *Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior.* Clave No. 47045.

> Con él [un acercamiento didáctico novedoso basado en la investigación en Matemática Educativa], buscamos construir una base de significaciones para procesos y conceptos del análisis matemático, especialmente del que se enseña al nivel universitario. Iniciamos con actividades para la construcción, entre los estudiantes, de un universo de formas gráficas que sea a la vez, amplio y estructurado; y continuamos con el desarrollo de la noción de predicción de los fenómenos de flujo apoyados en el binomio de Newton. La combinación de ambas tareas, sostenemos esta hipótesis, favorece al desarrollo del *pensamiento y el lenguaje variacional*. (Cantoral y Farfán, 1998).

Efectivamente para llevar a cabo dicha tarea, surgen preguntas tales como: ¿De qué naturaleza debe ser ese universo de gráficas? Y, más aún, ¿de qué forma se dará la construcción de las gráficas para que constituyan esa base de significados para los procesos y conceptos del análisis matemático?

Un avance en este sentido es el trabajo realizado por Cordero (2001, en prensa) en el que identifica diversas construcciones del Cálculo y el Análisis. En estas construcciones se subraya a los argumentos centrales como prácticas sociales que sostienen esta construcción. La síntesis consiste en una caracterización de la construcción de conocimiento a partir de elementos centrales como son los significados, los procedimientos que permiten la manipulación de los significados y los argumentos que genera el estudiante al realizar tareas asociadas a estos significados y procedimientos. En Cordero (2001) se identifican tres construcciones del Cálculo: de variación, de aproximación y de transformación. Cada una de estas construcciones tiene asociados sus significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos. El argumento es entendido como el elemento eje de la construcción. Los argumentos centrales de las construcciones mencionadas son la predicción, la analiticidad de las funciones y la modelación-graficación, respectivamente.

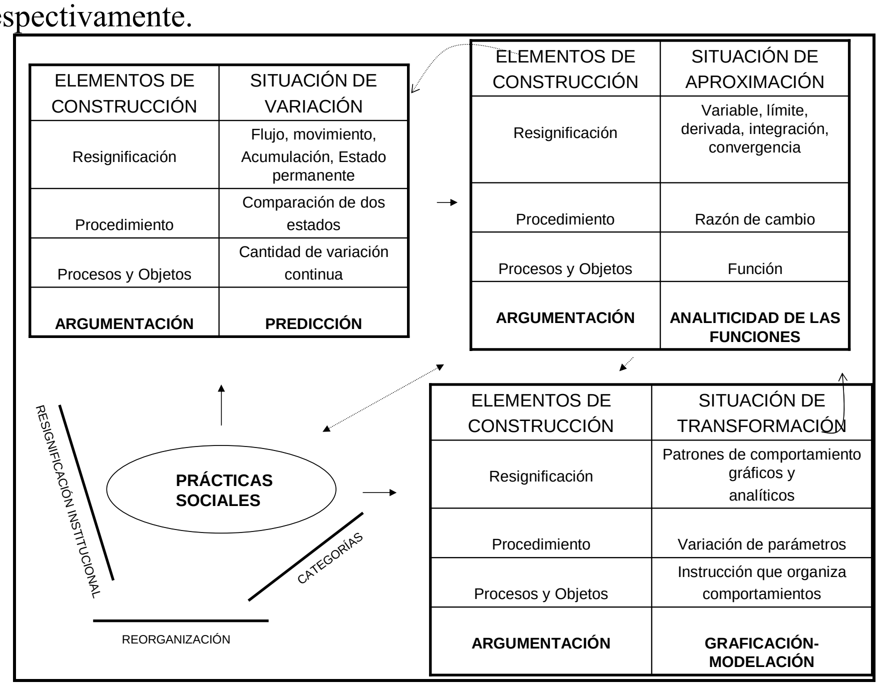


Ilustración 1. Diversidad de construcciones del Cálculo y del Análisis, Cordero 2001.

Estos elementos han servido como marco de referencia para caracterizar la construcción en otras investigaciones que dan evidencias de resignificaciones a partir del uso y modelación de conocimiento matemático: Buendía (2004) en el caso de la periodicidad, Campos (2003) en el caso de la transformación de funciones cuadráticas, Domínguez (2003) en el caso de la asintoticidad de las funciones y Rosado (2004) en el caso de la linealidad del polinomio. En el apartado siguiente se discute como estos elementos servirán de marco de referencia en el estudio del uso de las gráficas.

Categorización del uso de las gráficas

El estudio del uso de las gráficas se está consolidando como una línea de investigación en la que se estudian las prácticas de referencia asociadas a la graficación en el discurso matemático escolar. Flores (2005), Cen (2006), Torres (2004) y Suárez (2006) han aportado información sobre el tipo de gráficas que se encuentra actualmente en la educación básica y en el bachillerato, proporcionando evidencias de que el uso de las gráficas tiene un desarrollo que sustenta una construcción de conocimiento matemático.

Uso de las gráficas en el nivel básico a través de los libros de texto

Flores (2005) encontró un marco de referencia para describir el uso de las gráficas en el discurso matemático escolar de la educación básica. En este trabajo se identificaron tres momentos de uso: "el de uso del síntoma de la función [m1_síntoma], el del uso de la gráfica de la función [m2_uso de la gráfica] y el del uso de la curva [m3_uso de la curva]". Con esta información se dibuja un desarrollo del uso de las gráficas: se parte de elementos anteriores al establecimiento institucional de la gráfica por medio de actividades de reproducción y comparación de trayectorias, de reproducción de figuras, de ubicación y desplazamiento y de análisis de información (m1_síntoma), y se continúa con la inclusión de actividades que aluden explícitamente a la gráfica (m2_uso de la gráfica) y a la función (m3_uso de la curva).

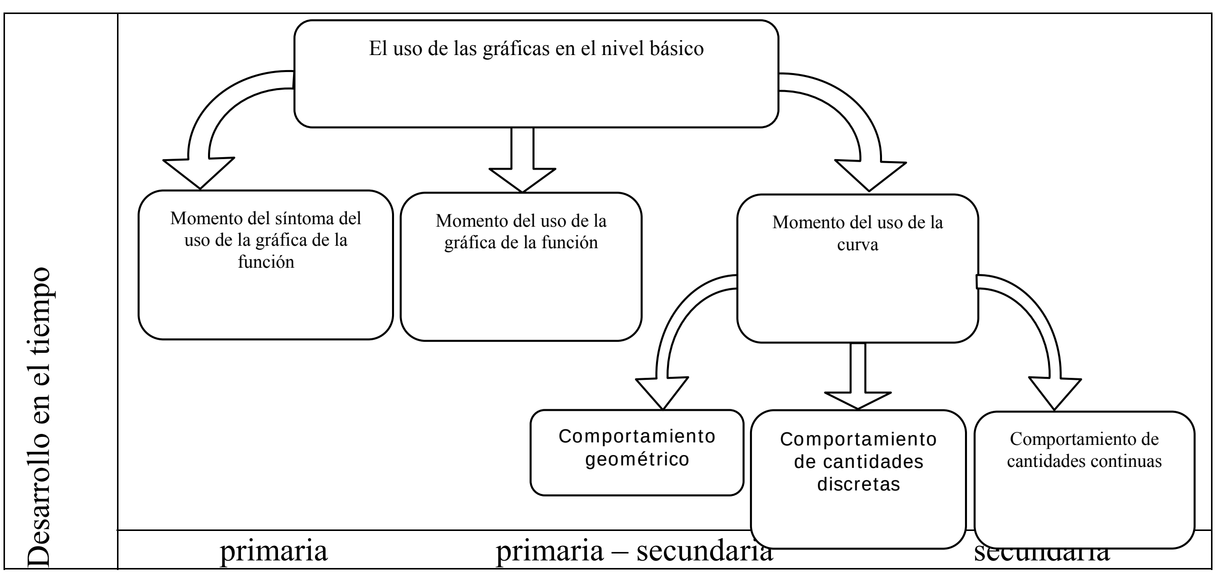


Ilustración 2. Desarrollo del uso de las gráficas en la Educación Básica (Tomado de Flores, 2005).

Uso de las gráficas en el nivel medio superior

El uso de las gráficas en el Nivel Medio Superior[34] (NMS) cuenta con un mayor número de momentos de caracterización. Cen (2006) analizó los planes de estudio para las matemáticas del NMS del Instituto Politécnico Nacional y los libros sugeridos para cada una de las seis asignaturas. De esta revisión caracteriza seis usos de las gráficas: distribución de puntos (M1-puntos), comportamiento geométrico (M2-geométrico), análisis de la curva (M3-curva), cálculo de áreas (M4-áreas), cálculo de volúmenes (M5-volúmenes) y (M6-análisis).

Matemáticas del Bachillerato						
SEMESTRE	USO DE LAS GRÁFICAS					
Álgebra	M1-puntos					
Geometría y Trigonometría	M1-puntos	M2-geométrico				
Geometría Analítica	M1-puntos	M2-geométrico				
Cálculo Diferencial	M1-puntos		M3-curva			
Cálculo Integral	M1-puntos		M3-curva	M4-áreas	M5-volúmenes	
Probabilidad y Estadística						M6-análisis

Ilustración 3. Desarrollo del uso de las gráficas en el Bachillerato (Tomado de Cen, 2006).

En esta caracterización de usos de las gráficas a lo largo de los seis semestres del bachillerato se observa la permanencia de graficar a partir de puntos (M1-puntos). La graficación a través de los comportamientos geométricos (M2-geométrico) sirve de antecedente a la graficación para el análisis de las curvas de las funciones (M3-curva). Los siguientes tres usos (M4-áreas, M5-volúmenes y M6-análisis) tienen una aparición localizada en sólo un semestre.

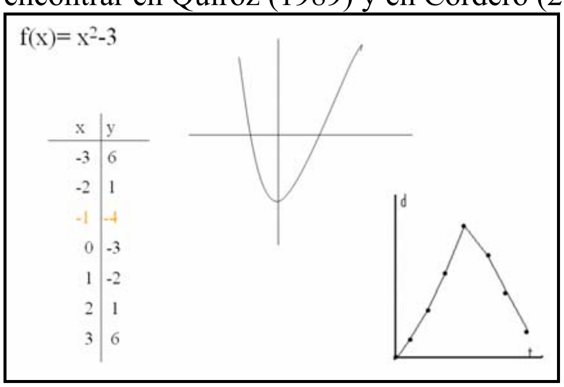
[34] Se conoce en México también como 'bachillerato' a las Instituciones de Educación Media Superior.

Uso de las gráficas con tecnología

Torres (2004) realiza un estudio del uso de las gráficas a partir de la revisión de la revisión de algunos textos de bachillerato (Phillips, 1999 y Zill, 1985) y de trabajos de investigación en Matemática Educativa (Cordero y Solís, 2001; Cantoral y Montiel, 2001; Suárez et al, 2004) e identifica los usos de las gráficas que se generan con el uso de la tecnología. En esta investigación se toma como de referencia principal a Torres (2004) como una vía para estudiar actividades de modelación del movimiento, con el uso de tecnología que permite la recolección de datos al trabajar con estudiantes de bachillerato.

Los elementos que sirven de base para la caracterización de usos de las gráficas en bachillerato por Torres (2004) las considera no sólo en su relación con el concepto de función sino con los significados, procedimientos y argumentos que intervienen en las acciones que desarrolla un estudiante ante una actividad de graficación. Este estudio se realizó desde la perspectiva socioepistemológica, en la que se consideró que la construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática. Esta correspondencia es el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana (Cordero, 2001).

El primer uso se refiere a la construcción de gráficas utilizando la relación de correspondencia entre dos variables, es decir, localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica, este procedimiento se encuentra frecuentemente en libros de texto del Nivel Medio y Nivel Medio Superior (Ilustración 4). Un segundo uso es la graficación por operaciones gráficas, ejemplo de este uso se observa en los diseños de situación de Cordero (2001) en los que se pide explorar lo que sucede cuando a la gráfica de una parábola (función prototipo) se le suma una recta o se multiplica por una constante observando los efectos gráficos y a partir de ellos modelar comportamientos de funciones. Este tipo de trabajo de operaciones con gráficas lo podemos encontrar en Quiroz (1989) y en Cordero (2001) (Ilustración 5).



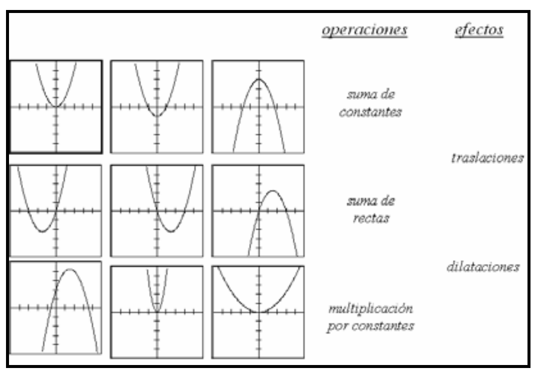


Ilustración 4. Uso de las gráficas a partir de su expresión algebraica

Ilustración 5. Uso a partir de operaciones gráficas

Un tercer uso se refiere a la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología, éste es el uso que tendrá especial atención en este trabajo. El estudiante realiza distintos movimientos ante un sensor y obtiene gráficas que están relacionadas con los movimientos que realiza, de la relación que el estudiante encuentre entre el movimiento y las gráficas se generarán los significados en este uso de las gráficas. En los apartados siguientes se describen la metodología y la situación de enseñanza presentada a los estudiantes que nos ayudó a caracterizar este nuevo uso de las gráficas.

La caracterización de estos tres usos de las gráficas se realiza a través de los elementos de significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos en la siguiente tabla.

Construcción de representaciones	**Gráficas utilizando la relación de correspondencia**	**Operaciones gráficas**	**Gráficas a partir de la simulación de un fenómeno físico con tecnología**
Significados y sistemas simbólicos	Establecer ejes de coordenadas Determinar puntos en el eje cartesiano	Transformación de funciones Comportamiento de una función Función derivada y primitiva	Comportamiento de las gráficas de la posición y de la velocidad en relación con la simulación (función primitiva y su derivada)
Procedimientos	Operaciones fundamentales	Variación de la variable y de sus coeficientes	Determinar la escala para el tiempo y la posición Identificar el tipo de movimiento Relacionar las gráficas con la situación
Procesos y objetos	Variables Función	Forma de la gráfica	Forma de la gráfica para identificar patrones de comportamiento relacionando las gráficas de la posición y de la velocidad
Argumentos	Relaciones de la función con la gráfica a partir de su expresión algebraica	Comportamiento tendencial de la función	A mayor velocidad mayor valor absoluto de la pendiente en la gráfica de posición A mayor pendiente en la grafica de posición, mayor distancia con respecto al eje en la gráfica de velocidad.

Ilustración 6. Descripción del uso de las gráficas en bachillerato (Tomado de Torres, 2004).

En el tercer uso los estudiantes modelan el movimiento al hacer una descripción gráfica de la posición y de la velocidad. Uno de los elementos que se problematiza es la inclinación de las rectas o curvas y su relación con las velocidades del movimiento. Los estudiantes pueden relacionar los intervalos de cambios de velocidad de la situación de movimiento con las gráficas obtenidas a partir de múltiples realizaciones del movimiento frente al sensor. De esta manera identifican la gráfica de una recta con menos inclinación con un movimiento donde su velocidad es lenta. Y la gráfica de una recta con mayor inclinación con un movimiento donde se velocidad es mayor.

La tecnología permite a los estudiantes tener una visión global y local, tanto cualitativa como cuantitativa de la gráfica, en la que los estudiantes pueden explorar y dar explicaciones de lo que sucede con la situación, por lo que será necesario plantear problemas de situaciones reales en las que los estudiantes puedan transitar con facilidad entre las diferentes representaciones: simulación, verbal, tabular, gráfica y algebraica antes y después de usar la tecnología. Las actividades propuestas a los estudiantes deben estar encaminadas a generar conocimientos matemáticos integradores.

Los ciclos de exploraciones, discusiones y reflexiones de situación-simulación-situación permiten incorporar los significados generados por los estudiantes para la construcción de una apreciación cualitativa y cuantitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo. En la ilustración 7 se puede apreciar la diversidad de asociaciones entre una situación de movimiento y la representación gráfica de la posición con respecto al tiempo: puntos donde la velocidad es nula, intervalos donde la velocidad es positiva o negativa y comparaciones entre instantes donde se tiene menor o mayor velocidad o rapidez (valor absoluto de la velocidad). En este sentido la actividad de aprendizaje planteada permite la construcción de conocimiento a partir de la modelación y la simulación del movimiento.

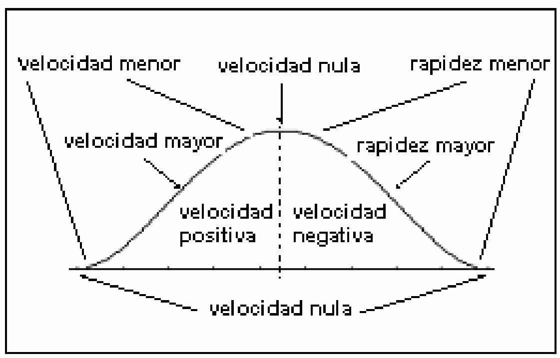


Ilustración 7. Descripción cualitativa de la velocidad

Uso de las gráficas en la modelación del movimiento

El interés por la modelación matemática se ha incrementado en tiempos recientes en todas las áreas de conocimiento, y específicamente en educación desde hace unas décadas, debido a los alcances de las matemáticas en su relación con otras ciencias. En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas este desarrollo se da de una forma diferente. Existen grupos de investigación (por ejemplo ICTMA[35]) que han centrado su interés en avanzar hacia este desarrollo en el campo de la matemática educativa. La concepción misma de modelación está teniendo una revisión dentro de la Matemática Educativa (Blum, 1993). La diversidad de estas concepciones tensa aspectos conceptuales en las teorías o marcos teóricos que se han construido (y se están construyendo) en la Matemática Educativa. Entre los conceptos más significativos se encuentran *el lenguaje de herramientas* y *el lenguaje de los objetos* (Cordero, 2001, Arrieta, 2003). Esta tensión obliga a debatir la relación entre la actividad matemática y la actividad humana como marco de referencia del conocimiento matemático. Dentro de este estudio se define a la modelación como una

[35] Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Modelación Matemática y Aplicaciones

construcción teórica[36] que un individuo realiza al enfrentar una tarea matemática en la que pone en juego sus conocimientos. En esta definición operativa se enuncian las características de esta construcción como las siguientes: posee su propia estructura, está constituida por un sistema dinámico, la simulación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un resultado deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones. Así, la graficación se estudia como categoría que sirva de vehículo para implementar el binomio modelación-graficación en la construcción de conocimiento matemático en el salón de clases con un ambiente tecnológico.

En todos los diseños de situación se tiene la misma estructura: se presenta una situación en un contexto físico, susceptible de ser reproducido, y se pide hacer una descripción de la situación en términos gráficos. Cuando se trabaja con los discentes[37] se pone énfasis en que las actividades que van a realizar tienen como propósito resaltar la dimensión de uso que tienen las matemáticas. Uno de los aspectos importantes de las matemáticas es cuando sirven como una herramienta para comprender una *situación en un contexto específico*[38].

De tal manera que hay dos etapas en el diseño de la gráfica que el discente usará para explicar la situación en un contexto específico planteada. La primera en la que recurre a sus conocimientos previos y la segunda generada con el uso de la tecnología, donde hay una interpretación y ajuste de la primera. Hay variables que se destacan de la situación planteada. La posición, la temperatura, la altura, el tiempo son magnitudes que sufren un cambio y son susceptibles de ser medidas. El equipo tecnológico que se ofrece a los discentes consta de sensores, transductores y calculadoras. Por medio del sensor, cada cierto tiempo (intervalos de medio segundo, de un segundo, etc.), se toman datos de la variable elegida. El sensor está conectado a un transductor que transforma los datos en información y que a su vez trasmite a la calculadora. Hay una interacción entre estos tres instrumentos, la calculadora es la que controla toda la interacción por medio de un programa que determina cómo y en qué momento tomar los datos, para recibir dos listas de datos, de la variable y del tiempo a partir de las cuales genera otras listas y las gráficas asociadas.

En la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha tenido particularmente importancia la actividad de la simulación, esto se debe a la complejidad de las construcciones. En nuestro proyecto se adopta la perspectiva de que la simulación está estrechamente relacionada a la actividad de modelar con tecnología y se elije la representación gráfica que proporcionan calculadoras con poder de graficación[39] así como los sensores[40] (transductores de datos).

---

[36] Para Martínez y Cortiz (1996) el término modelo en Epistemología es entendido como una construcción teórica que sirve para interpretar o representar la realidad o una parte de ella.

[37] Se usa esta palabra como un término general para designar a las personas con las que se han trabajado las actividades, ya que éstas han sido tanto estudiantes de bachillerato, licenciatura y posgrado como profesores que asisten a talleres, cursos y seminarios.

[38] Por una *situación en un contexto específico* entendemos una pregunta o un problema dentro de un contexto físico, social o incluso matemático. Se espera que al responder la pregunta o problema planteado se haga uso de las características del contexto específico.

[39] Calculadoras Voyage, TI-92 y ClassPad.

[40] Se han utilizado los transductores, analizadores de datos y sensores asociados a las calculadoras mencionadas en la nota anterior.

La graficación como múltiples realizaciones. En el planteamiento de las experiencias de aprendizaje está considerado que los estudiantes realicen en varias ocasiones el movimiento (simulación) para poder observar patrones gráficos que lo caractericen. En la situación de una persona que se aleja para después regresar a un punto de partida se toman decisiones sobre la distancia a recorrer, sobre el instante en el que se emprende el regreso, sobre la trayectoria que se debe seguir frente al sensor. Cada una de estas decisiones tiene consecuencias sobre la gráfica resultante como se puede observar la siguiente ilustración.

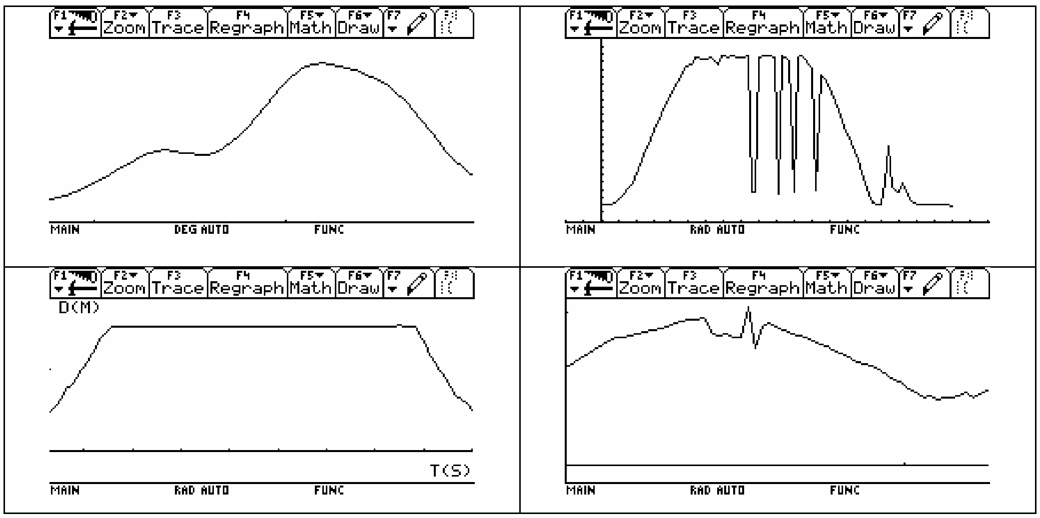


Ilustración 8. Múltiples realización de una simulación del movimiento de una persona

De la diversidad de gráficas obtenidas se pueden extraer comportamientos que persisten no importando las variables incluidas en el movimiento realizado. Dos de ellas se refieren al tipo de gráfica que se genera en todo el trayecto en una dirección, por ejemplo, el trayecto de ida (ilustración 9a) o bien en el patrón de gráfica alrededor del instante en que se emprende el regreso (ilustración 9b).

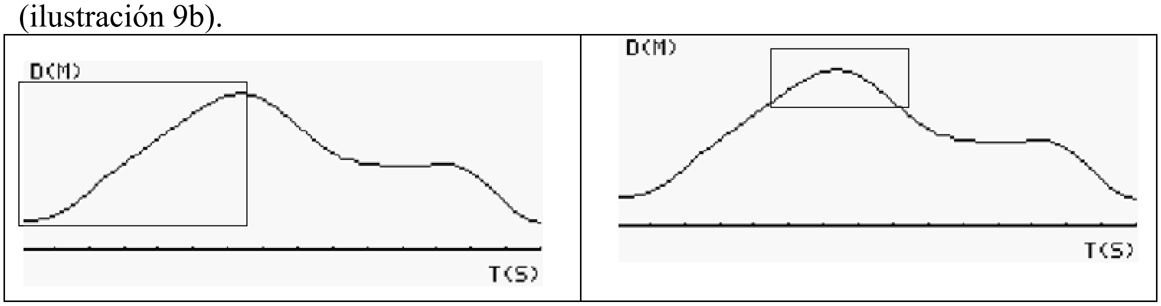


Ilustración 9. Patrones gráficos identificados en el movimiento de una persona.

Estos patrones gráficos adquieren sentido y significado en la situación a partir de las relaciones que se pueden establecer entre las gráficas y la situación de movimiento que viven los estudiantes.

La graficación como ajustes en una estructura para producir un patrón deseable. Con los significados construidos por los estudiantes que relacionan los modelos gráficos con la situación de movimiento los estudiantes pueden resignificar las gráficas a partir de los ajustes que requieren hacer para obtener nuevas gráficas relacionadas con la primera. Veamos el caso del *movimiento de ida y vuelta*, una vez establecido el patrón gráfico se pueden variar algunos de los parámetros de la situación de movimiento para generar diversas gráficas asociadas en las que la distancia máxima o el tiempo total sean la mitad de los originales, cambiar el punto de referencia al punto máximo donde se llega en el recorrido. (Véase la ilustración 9).

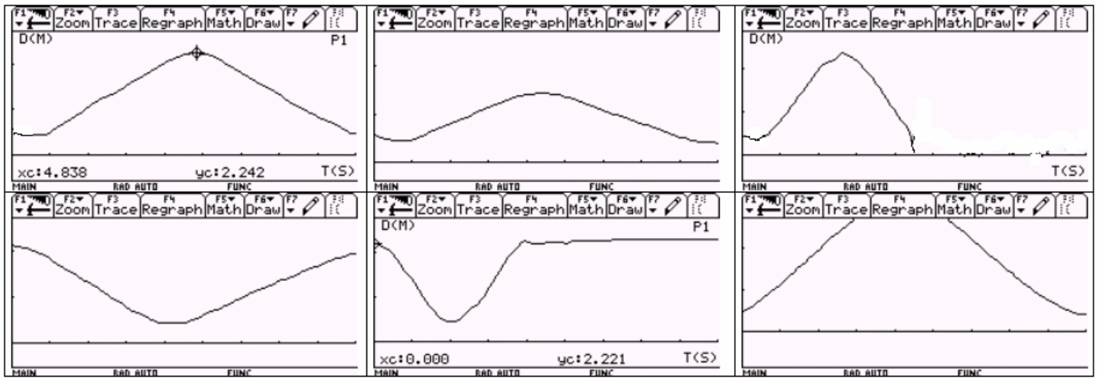


Ilustración 9. Variaciones en el patrón gráfico de 'ida y vuelta'.

De esta manera, el potencial de la graficación es mayor si se le considera en sí misma una modelación. Las características que debería cumplir son: 1) las gráficas se obtienen a partir de una simulación que lleva a cabo múltiples realizaciones y hace ajustes en el movimiento para producir un resultado deseable en la gráfica, 2) tiene un carácter dinámico que permite crear modelos gráficos que se convierten en argumentos para nuevas descripciones de movimientos, 3) propicia la búsqueda de explicaciones y enfatiza los comportamientos invariantes en las situaciones. Uno de los propósitos de esta investigación es aportar las evidencias de que la práctica de la graficación soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación.

Discusión: Hacia una epistemología del uso de las gráficas

En este escrito se presenta una revisión de los trabajos que consideran el uso de las gráficas como objeto de estudio en matemática educativa. Con esta revisión se delimita el objeto de una investigación que se ubica en el estudio del uso de las gráficas que se presenta al modelar situaciones de movimiento. En los estudios de uso de las gráficas revisados en este artículo existe una intención de caracterizar a la graficación como un conocimiento con estructura propia y susceptible de desarrollo. En Flores (2004) y en Cen (2006) el análisis se ha realizado a partir del discurso institucionalizado de los libros de texto y de los programas de estudio. El resultado es, por un lado, la identificación del tipo de tareas de graficación, estos distintos tipos caracterizan la forma del uso de las gráficas. Por otro lado, se da cuenta de distintas funciones de las mismas gráficas a partir de la identificación de momentos o grupos de tareas. Estos elementos caracterizan el funcionamiento de esos usos de las gráficas. En Torres (2004) y en Suárez (2006) se han integrado elementos propios de la graficación para diseñar situaciones de modelación del movimiento que resignifican las situaciones de cambio y variación. Estos análisis contribuyen en la formulación de una epistemología del "uso de las gráficas" que determine su desarrollo institucional ante situaciones específicas en los distintos niveles educativos. El trabajo con los estudiantes está aportando las evidencias de las construcciones que se logran con las nuevas formas y funcionamientos del uso de las gráficas al modelar situaciones de cambio y variación.

Referencias

Arrieta, J. (2003) Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN.

Arrieta, J.; Buendía, G.; Ferrari, M.; Martínez, G.; Suárez, L (2004). Las Prácticas Sociales como Generadoras del Conocimiento Matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 418-422.

Blum, W. (1993) Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En Breiteig, T.; Huntley, I.; Kaiser-Messmer, G. (Eds.) Teaching and Learning Mathematics in Context. Ellis Horwood.

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico). Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Buendia, G.; Cordero, F. (2005) Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practice Framework: A Socioepistemological Study. *Educational Studies in Mathematics,* 58*, 3*, 299-333.

Campos, C. (2003) La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación sociepistemológica. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Cantoral, R.; Farfán, R.M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *épsilon* - Edición especial. España, 42, 353-369.

Cantoral, R.; Montiel, G. (2001) Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático. Prentice Hall y Pearson Education.

Cen, C. (2006) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctiva institucional en el bachillerato. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (en prensa). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral *et al* (Ed.) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. Reverté-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. (aceptado para su publicación)

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matemática e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79.

Cordero, F. (2003) Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame Vol. 16, Tomo 1, pp. 73-78.

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 4, 2, 103-128.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número 1, 56-74.

Cordero, F.; Solís M.(2001). Las gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo. Grupo Editorial Iberoamericana.

Domínguez, I. (2003). La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang, S.A., Bern.

Flores, R. (2005) El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Hartmann, Ch. y Choppin, J. (2003). *Measurement, Representation, and Computer Models of Motion*. Yearbook (National Council of Teachers of Mathematics) 293-303.

Leinhardt, G.; Stein, M.; Zaslavsky, O. (1990) Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. Review of Educational Research, 60, 1, 1–64.

Phillips, E., Butts, T. y Shaughnessy, M. (1999). Álgebra con Aplicaciones. Editorial Oxford.

Quiroz, M. (1989) Instalación de un lenguaje gráfico en estudiantes que inician estudios universitarios: un enfoque alternativo para la reconstrucción del discurso matemático escolar del precálculo. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Rosado, P. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez, L. (2006) El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico para la modelación del cambio en un ambiente tecnológico. Memoria predoctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez, L. (2002). Actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo. Proyecto de investigación doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Suárez L, Carrillo C, López J. (2004). Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación. Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México. P. 221.

Suárez, L.; Flores, C.; Gómez, A., Licona, R. (2004) Uso de las Gráficas a través de Actividades de Modelación Matemática con Calculadoras y Dispositivos Transductores". Resumen del taller presentado en el Quinto encuentro de televisión y nuevas tecnologías educativas. DTE-IPN

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN.

UNA PROPUESTA CURRICULAR EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO DEL IPN

José Luis Torres Guerrero
CECyT Cuauhtémoc, IPN
jeluistg@yahoo.com.mx

Resumen

En este escrito se presenta una propuesta de diseño curricular para el área de matemáticas en el bachillerato que considera la necesidad de articular los esfuerzos de distintas figuras de una institución como el Instituto Politécnico Nacional. Esta propuesta tiene como uno de sus principios rectores el reconocimiento de que los problemas importantes de la educación son problemas de sistema por lo que requieren, para avanzar en su solución, un enfoque sistémico. Por esta razón se exponen los aspectos de los marcos de referencia institucional que la propuesta de diseño curricular toma en cuenta: el Modelos Educativo, el Modelo de Integración Social y el Modelo de Innovación Educativa, todos, del Instituto Politécnico Nacional. En el plano específico de la propuesta comprende dos elementos. Por un lado, desde el ámbito de la investigación en diseño curricular, el marco de los currículos establece los distintos niveles de concreción que van desde los objetivos de una institución hasta el trabajo en el salón de clases. Y, por otro lado, se hacen explícitas las dimensiones de los fenómenos didácticos establecidas en la Teoría de Situaciones Didácticas. Finalmente, se presentan las principales características de la propuesta de diseño curricular en dos años y medio que debe articularse, de manera integral, con un programa de formación docente en matemáticas como un proyecto de innovación educativa.

Palabras clave
Modelo educativo, diseño curricular, marco de los currículos, red de interacción e innovación académica en matemáticas, evaluación sistemática.

Introducción

En septiembre de 1994 se inició formalmente la instrumentación del modelo educativo "Pertinencia y Competitivad" en el Nivel Medio Superior (NMS) del Instituto Politécnico Nacional (IPN). La generación de estudiantes 1994-1997 fue la primera que cursó los nuevos programas elaborados por profesores de las diversas academias. En el caso de matemáticas se convocó a un grupo de profesores de los diversos CECyT[41] y "al vapor" se elaboró el programa de *Álgebra (primer semestre)*.

Para el programa de *Geometría y Trigonometría* (del segundo semestre) los profesores tuvieron la oportunidad de discutir y manifestar a la autoridad correspondiente que para ser especialista en la elaboración de programas no basta tener experiencia y buen prestigio como profesor. De esta manera se consiguió que para la elaboración del resto de los programas del NMS se dispusiera de más tiempo y, a iniciativa de los profesores, que constituyeron la Academia Institucional de Matemáticas (AIM), se invitó a investigadores en Matemática Educativa y sus aportaciones fueron fundamentales.

De esta forma los programas dejaron de ser un listado de temas para convertirse en documentos que le daban sentidos al modelo "Pertinencia y Competitividad" en el área de matemáticas. Un

[41] Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos. Son los planteles de bachillerato del IPN

grupo de profesores inquietos, primero, y la AIM, después, se encargaron de planear, organizar, instrumentar y difundir talleres para que los profesores de matemáticas vivieran en calidad dual de discente y docente el modelo de "Pertinencia y Competitividad". Tiempo después se elaboraron paquetes didácticos para estos cursos.

Evaluación sobre la formación matemática

Entre las evaluaciones internacionales que se aplican en México sobresale El proyecto PISA (Programme for International Student Achievement) de la OCDE, pues evalúa más la capacidad que tienen los jóvenes de países miembros de la organización e invitados para utilizar sus conocimientos y destrezas con el objetivo de afrontar los retos de la vida real que el grado en el que dominan un currículum escolar específico.
Los resultados de estas evaluaciones colocan a México en los últimos lugares. Por ejemplo, en la siguiente gráfica se tienen los resultados de 2000.

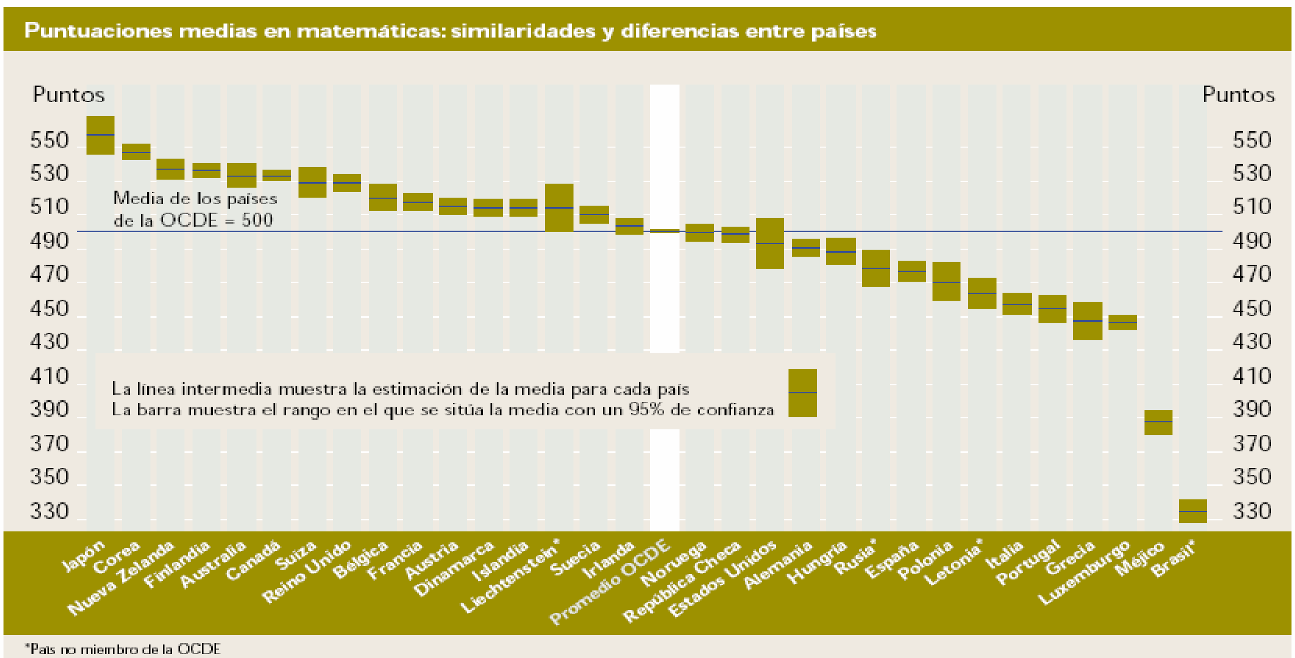


Ilustración 1. Puntuaciones medias en matemáticas en el Proyecto Pisa (Tomado de OCDE, 2000)

Vale la pena destacar que en el proyecto PISA se defina la formación matemática como:
"La capacidad para identificar, comprender e implicarse en las matemáticas y emitir juicios con fundamento acerca del papel que tienen las matemáticas como elemento necesario para la vida privada, laboral y social, actual y futura, de un individuo como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar." (OCDE, 2000, p 20)

La definición gira en torno a usos muy amplios en la vida de las personas, en vez de alrededor del simple manejo mecánico de las operaciones. En consecuencia, el término «formación» está usado para indicar la capacidad de hacer un uso funcional de los conocimientos y las destrezas matemáticas más bien que para aprenderlos dentro de un currículo escolar. Esto explica los resultados obtenidos por México.

Por otra parte, los programas educativos que ofrece el Instituto Politécnico Nacional (IPN) son intensos y extensos, con casi nula integración horizontal y vertical, es decir entre niveles y modalidades formativas. Ello tiene como consecuencia una amplia dispersión del esfuerzo institucional, limitando las posibilidades de aprovechar armónicamente las experiencias de investigación y vinculación, así como la oferta en educación continua, el campus virtual y otros servicios institucionales. Esta estructura está compuesta de canales en una sola vía, con escasas salidas laterales y poca comunicación entre las Unidades Académicas.

La oferta educativa del Instituto muestra problemas que es necesario atender. En el caso de la educación media superior 51 de cada 100 estudiantes interrumpen sus estudios en el trayecto (IPN, 2003), situación que, por una parte, frustra aspiraciones personales y, por la otra, ejerce una presión importante sobre los recursos y la eficacia y eficiencia de los esfuerzos institucionales.

Sin embargo, el Instituto tiene una alta demanda en el examen de ingreso de los aspirantes para las diferentes opciones del nivel medio superior y superior, lo que conlleva, por una parte, a que se queden muchos solicitantes sin ser aceptados y, por la otra, que ingresen los mejores aspirantes.

En los tres niveles formativos que atiende el IPN (educación media superior, superior y posgrado) los planes de estudio son, en su gran mayoría, rígidos y orientados por un enfoque altamente especializado, además de enmarcarse en una pedagogía centrada fundamentalmente en la enseñanza, lo cual inhibe la innovación y el diseño de estrategias de aprendizaje con una participación activa por parte de los estudiantes; la colaboración intra e interinstitucional y la incorporación de experiencias de aprendizaje en entornos y modalidades diversas.

Marcos de Referencia

El IPN cuenta con tres modelos que orientan y dan sentido a sus actividades para concretar su Reforma Académica, es decir, para lograr responder a las necesidades de formación de sus alumnos. Estos marcos de referencia son El Nuevo Modelo Educativo, El Modelo de Integración Social y el Modelo de Innovación Educativa.

El politécnico de hoy no responde plenamente a las necesidades de sus alumnos y de la sociedad a la que se debe. Por ello la importancia del llamado Nuevo Modelo Educativo.
Este modelo tiene como característica esencial la de estar comprometido con la construcción de una sociedad mas justa, sin rezagos sociales, con una formación que incluya los distintos enfoques y propuestas del conocimiento científico y tecnológico, y que garantice un proceso formativo centrado en el aprendizaje, pero un tipo de aprendizaje que:

- promueva una formación integral y de alta calidad científica, tecnológica y humanística;
- combine equilibradamente el desarrollo de conocimientos, actitudes, habilidades y valores;
- proporcione una sólida formación que facilite el aprendizaje autónomo, el tránsito de los estudiantes entre niveles y modalidades educativas, instituciones nacionales y extranjeras y hacia el mercado de trabajo;

• se exprese en procesos educativos flexibles e innovadores, con múltiples espacios de relación con el entorno, y;
• permita que sus egresados sean capaces de combinar la teoría y la práctica para contribuir al desarrollo sustentable de la nación.

El nuevo modelo educativo se centra más en procesos de formación, que en niveles de estudio, y en la formación continua y permanente. Concebirlo así responde plenamente a la historia de la institución.

Los propósitos institucionales establecidos en la misión, la visión de futuro y el modelo educativo, deben encontrar traducción concreta en cada programa de estudios, en la selección y organización de los contenidos y en las maneras de llevar a cabo el proceso de formación de profesionales, por lo que el modelo académico es la forma de organización y funcionamiento de los espacios de formación institucional.

Un modelo educativo concebido de tal manera facilita la adquisición de las herramientas necesarias para que los estudiantes de todos los niveles aprendan a lo largo de su vida, tengan las bases para su actualización permanente y adquieran las competencias para una práctica exitosa de su profesión en los ámbitos local, nacional e internacional, pero también, el modelo genera las oportunidades para crecer y consolidarse en los aspectos de desarrollo humano y social.

Los modelos educativo y académico son marcos de referencia institucionales para todos los niveles y modalidades de estudio. Por su nivel de generalidad abarcan únicamente los aspectos básicos, mismos que podrán ser adoptados e incorporados por las escuelas (Unidades Académicas), reconociendo las particularidades en la historia y características de cada una de ellas. Esto implica que en cada nivel se darán matices y énfasis diferentes a los distintos elementos que forman el modelo educativo y académico, pero la estructura y funcionamiento general deberá ser similar en todas y cada una de ellas.

Por su parte, el Modelo de Integración Social plantea una forma de concebir la misión social del Instituto y su relación con los distintos sectores de la sociedad como una interacción bidireccional, corresponsable y mutuamente enriquecedora, que busca la participación conjunta en la identificación de requerimientos, demandas y soluciones, la mejora de las funciones sustantivas y el reconocimiento del esfuerzo institucional. El Modelo retoma, redefine y conjunta las funciones tradicionales de vinculación y extensión con funciones y actividades como la cooperación internacional y la internacionalización, propiciando formas distintas de organización del trabajo al interior del IPN, y la constitución de cuerpos colegiados que impulsen una relación con el entorno más creativa y eficaz, a la vez que un trabajo integrador de las funciones sustantivas y de las escuelas.

De esta manera, los planes de estudio, organizados en unidades de aprendizaje y en ciclos semestrales, y el funcionamiento en red, deben permitir a los estudiantes construir trayectorias académicas que rebasen las fronteras de cada uno de los niveles educativos; y una oferta educativa articulada desde el nivel medio superior hasta el posgrado, con lo cual podrán diseñar planes de vida y carrera. Para el Instituto será una oportunidad para superar las dificultades en la organización de niveles educativos por separado y constituir un verdadero sistema que garantice el tránsito fluido entre niveles y modalidades.

Las innovaciones educativas son el medio que permite hacer cambios, mejoras en una institución educativa y que tales mejoras lleguen a ser una de las característica de la nueva normalidad. El Modelo de Innovación Educativa del IPN proporciona un marco para realizar estas innovaciones y para la formación y el desarrollo de una cultura de la innovación. Precisa las condiciones necesarias para que las innovaciones puedan llegar hasta la institucionalización e interiorización. Este modelo tiene dos partes. La primera parte comienza con la decisión de innovar, que es un proceso en sí mismo e incluye doce criterios para caracterizar una innovación educativa. Después de la decisión de innovar hay ocho fases que guían el proceso de innovación. Esta propuesta curricular cumple con tales criterios; es pues, una innovación educativa.

Elementos metodológicos para el diseño curricular

Para establecer condiciones que permitieran en la práctica, y no sólo en el discurso, el cumplimiento de los propósitos institucionales plasmados en el modelo educativo, el diseño de los planes de estudio debe considerar una estructura básica similar, pero flexible, que tenga como objetivo la adquisición de los conocimientos, habilidades, actitudes y valores propios de un programa determinado, todo ello dentro del marco del modelo educativo adoptado.
La estructura básica para los niveles medio superior y superior estará constituida por áreas de formación que serán la base para organizar los objetivos y contenidos curriculares. Un área de formación se constituye con los contenidos requeridos en una etapa del proceso formativo, lo que no significa necesariamente una secuencia temporal definida. Son etapas que permiten organizar los contenidos para el logro de los objetivos curriculares. Estas áreas incluyen, además de los contenidos tradicionales propios de un programa de estudios, un área de formación institucional que se centre en el estudiante para que éste cuente con un conjunto sólido de conocimientos y habilidades para construir su propio proceso de aprendizaje, así como con un conjunto de valores y actitudes, definidos en el perfil de egreso, concordantes con el modelo educativo y la misión y visión del IPN.

En cuanto a la investigación en el nivel medio superior, ésta debe ser utilizada como método para la adquisición del conocimiento por parte de los estudiantes y para que los profesores se mantengan actualizados. La incorporación de los estudiantes a proyectos desarrollados en las escuelas de nivel superior y los centros de investigación, deben permitir al alumno descubrir y enfrentar el conocimiento, desarrollar la capacidad para la resolución de problemas y la toma de decisiones, por lo que su enfoque en este nivel es netamente formativo. Por otra parte, el desarrollo de la investigación educativa es un quehacer de algunos miembros del personal docente de las escuelas de nivel medio superior, pero también debe ser un mecanismo para la retroalimentación de los procesos formativos y la innovación de los mismos.

Elemento central del diseño: El Marco de los currículos
El currículo, según los Estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) de EE UU, es "un plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-

aprendizaje", especificando, por supuesto, los criterios que se aplicarán para evaluar qué ha aprendido el alumno. Podemos seguir a Batanero, quien distingue más matices del currículo, y hacer referencia al término con diferentes sentidos:
1. *Currículo planeado*: es un plan escrito para el sistema escolar, que incluye especificaciones de lo que se tiene que enseñar, en qué secuencia y a qué edades. Puede también contener sugerencias de métodos de enseñanza y de modos de evaluación del aprendizaje. El currículo planeado se conoce a través de la lectura de los documentos oficiales.
2. *Currículo aplicado*: es lo que se enseña realmente en las aulas. Puede ser evaluado mediante la observación de las clases o entrevistas o informes de los profesores.
3. *Currículo logrado*: es lo que los estudiantes pueden demostrar que han aprendido.

La incorporación de una categoría más, el *currículo potencialmente aplicado*, resulta particularmente útil cuando se diseñan planes de mejoramiento, porque permite llegar a un grado de concreción, mediante herramientas conceptuales, organizacionales y tecnológicas; es un currículo planeado a un docente con formación profesional, que participa, por supuesto, de manera articulada con los demás agentes del sistema, en el diseño de este currículo.

4. *Currículo potencialmente aplicado*: comprende materiales (paquetes didácticos), planes (de seguimiento, capacitación y evaluación) y dispositivos organizacionales (redes y comunidades, con un marco de operación explícito) que concretan el currículo planeado desde una perspectiva de sistema y profesional.

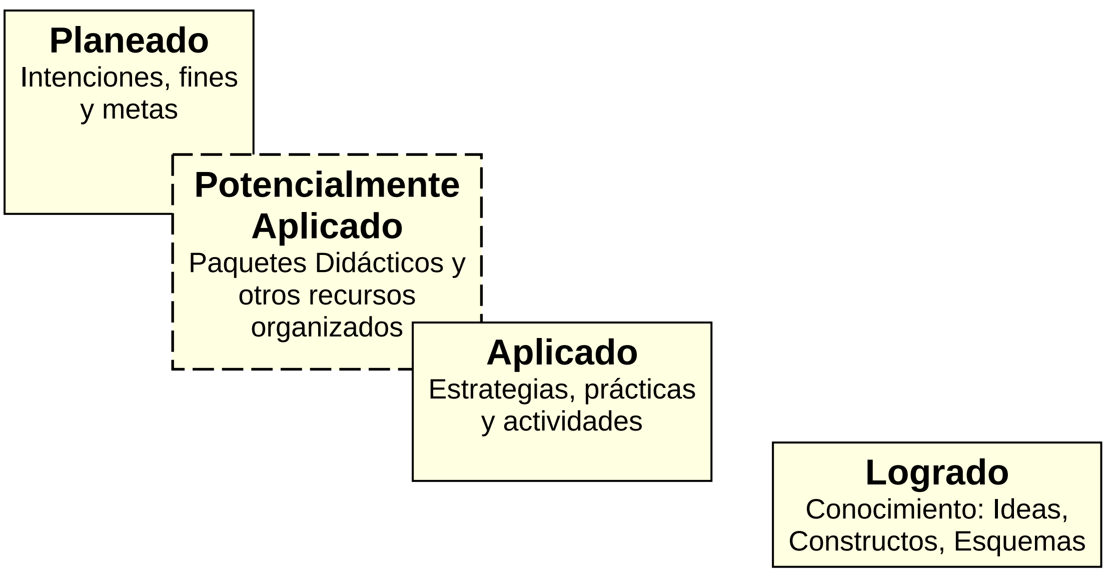


Ilustración 2. Marco de los currículos

Este cuarto matiz destaca la importancia de que el docente cuente con materiales acordes al currículo planeado y la necesidad de organizar cursos de capacitación para los profesores.

Diseño de una propuesta curricular para el área de matemáticas

Al tomar en cuenta lo anterior, se tiene la siguiente propuesta de diseño curricular para matemáticas en el NMS, cuyos objetivos son:

1. Sentar las bases para que, en el área de Matemáticas, el Instituto funcione como una organización discente, con un enfoque sistémico, articulando sus estrategias de tal manera que se atienda a los objetivos de la institución sin dejar de lado los de los individuos y grupos que la componen. Y es que las organizaciones discentes anticipan en sus misiones los cambios que le permitirán perfeccionar su funcionamiento y mantienen un monitoreo permanente para impedir que el sistema se desajuste.
2. Elaborar una propuesta de planes y programas de estudio del área de matemáticas con paquetes didácticos y sistemas de evaluación que incluya la evaluación externa para garantizar, mediante procedimientos cuantitativos y cualitativos, que el sistema politécnico cumpla lo que ofrece.
3. Diseñar un sistema de evaluación sistemática que proporcione información válida y confiable sobre los indicadores que permitan evaluar el cumplimiento de las funciones de la institución.
4. Incrementar significativamente el uso de los resultados de la investigación en educación matemática en la práctica docente. Es decir, hacer de la práctica docente una actividad basada en los resultados de la investigación en educación matemática.
5. Contribuir a la consolidación de la autonomía de los cuerpos docentes al mismo tiempo que se incorporan mecanismos de rendimiento de cuentas que garanticen la efectividad de los métodos que emplean.
6. Establecer un sistema de evaluación docente que garantice el desarrollo profesional de los profesores para avanzar hacia la conformación de grupos académicos capaces de responsabilizarse de los programas del área.
7. Conformar un grupo de profesores capacitados para diseñar, instrumentar y evaluar el diseño curricular del área de Matemáticas.
8. Conformar una *red de interacción e innovación académica en matemáticas* (RIIAM) de profesores, estudiantes y autoridades que constituyan la masa crítica indispensable para realizar la reforma integral del IPN. Vincular la RIIAM con instancias académicas de otros sistemas y otros países.

Dimensiones del currículo

El modelo vigente en el politécnico, en lo que respecta al trabajo en el aula, no se contrapone con el anterior de “Pertinencia y Competitividad”, sino que en cierta forma es un desarrollo del mismo. Así, los paquetes didácticos elaborados hasta ahora y las experiencias e investigaciones desarrolladas en el marco del modelo educativo anterior son un antecedente y referencia para las actividades que lleven a la concreción del nuevo modelo. Por ello, en esta propuesta se toman en cuenta tres dimensiones del currículo.

1. *Dimensión epistemológica*. La Matemática es un saber articulado en una cultura para enfrentar la resolución de problemas de diversos tipos (tanto los propios de la disciplina matemática como los de utilidad social) y tiene un marcado carácter heurístico. En el NMS la Matemática no puede ser sólo un sistema axiomático deductivo en el que la demostración formal es la manera de validar un saber, sino que, sin excluir esta perspectiva como propia de la cultura de la comunidad matemática, se debe desarrollar una perspectiva heurística que permita fungir como matemáticos, ante uno mismo y los demás, para enfrentar con éxito problemas en cuya solución hay elementos inéditos que exigen una actitud creativa.

2. *Dimensión cognitiva*. Desde esta perspectiva, el aprendizaje es la vía que se recorre en la construcción de esquemas de acción y estructuras de conocimiento complejas, y se demuestra en su utilización autónoma al enfrentar con éxito situaciones con un alto contenido de incertidumbre.
3) *Dimensión didáctica*. En este caso, la propuesta se nutre de dos fuentes: la tradición de formulación y resolución de problemas y la ingeniería didáctica, además de incorporar el uso de las TIC para el desarrollo de capacidades productivas y generadoras de autonomía e iniciativa en la formulación y resolución de problemas.

Fases de la propuesta
En esta propuesta se distinguen tres fases, con varias etapas. A continuación se presentan éstas en un cuadro en el que se distinguen productos y participantes.

En la última columna de esta tabla se escriben periodos a manera de ejemplo, para dar una idea de los tiempos requeridos (dos años y medio).
La primera fase consta de un seminario en el cual participará un grupo de profesores que constituyan una red de interacción académica, que cuenten con preparación en matemática educativa y que estén familiarizado con trabajos de investigación (mejor aún, que hayan participado en ellas). Este conocimiento les permitirá identificar los mejores asesores en los que se pueden apoyar para la elaboración de un marco específico para el rediseño curricular en matemáticas. Y una vez que se tenga el marco, apoyarse en él para el diseño de diplomados en los que se elaborará la propuesta curricular. Este grupo de profesores serán los coordinadores de estos diplomados.

Aquí hay un reconocimiento de que el rediseño curricular no es una actividad sencilla y no basta ser profesor de matemáticas con larga experiencia. Se requiere tener conocimientos sobre el marco institucional, para ser consecuente con él; de los estándares nacionales, para cumplir con las expectativas del país; y de los estándares internacionales, para responder a las exigencias del mundo actual. El rediseño curricular debe partir de una buena base y esta es la finalidad del seminario.

FASE	Duración en horas	Producto	Participantes	Periodo
I SEMINARIO				
Un marco para el rediseño curricular	100	Un marco para la elaboración de la propuesta curricular. Diseño de los diplomados en los que se elaborará la propuesta curricular **Equipo de instructores de los diplomados**	RIIAM Profesores invitados Asesores	Diciembre de 2005 a junio de 2006

II DIPLOMADOS				
1. Un currículo para el área de Matemáticas en el sistema IPN	180	Programas, con planteamientos explícitos para cada una de las dimensiones del currículo de todas las asignaturas del área de Matemáticas.	Profesores representantes de cada plantel (**Perfil Especifico**)	Julio a diciembre de 2006
2. Materiales, recursos y actividades para la concreción de las intenciones curriculares	180	Paquetes Didácticos que concreten las vías que se establecen en los programas para lograr los objetivos institucionales del área de Matemáticas del NMS-IPN	Profesores representantes de cada plantel	Enero a junio de 2007
3.1 Programación y **gestión de las unidades didácticas**	100	Plan de capacitación para el uso de los programas y sus Paquetes Didácticos	Profesores representantes de cada plantel	Julio a diciembre de 2007
3.2 El **seguimiento y la evaluación** de la instrumentación de las unidades didácticas	80	Planes para el seguimiento de la instrumentación y la evaluación de los programas	Profesores representantes de cada plantel	
III TALLERES				
Talleres para el Manejo del rediseño curricular del área de Matemáticas	100	Planes individuales y de Academia. Portafolio Red de Profesores	Profesores	Enero a junio de 2008

Ilustración 3. Descripción general la propuesta de diseño curricular en matemáticas.

En la segunda fase se contemplan tres diplomados a desarrollarse en año y medio. En el primero se elaboran los programas de todo el nivel en los cuales se deben tener planteamientos específicos para las tres dimensiones del currículo ya mencionadas. Se trabajo en todos y no en uno por uno porque se debe tener el panorama global del bachillerato para identificar líneas transversales a desarrollarse en los tres años y los nuevos contenidos que deben incluirse (y esto conlleva contenidos que ya no se verán). En este diplomado participarán profesores representantes de cada plantel que deben contar con un perfil específico para trabajar en las actividades del diplomado y servir, además, como puente de comunicación con los profesores de matemáticas del CECyT en el que laboran.

El segundo diplomado es para la elaboración de paquetes didácticos que permitan concretar las vías que se establecen en los programas para lograr los objetivos institucionales. Estos paquetes consistirán de libros para el estudiante y el profesor de cada una de las asignaturas con actividades acordes a los programas recién elaborados, con discos compactos en los que se tengan actividades en computadora e Internet, además de un sitio en Internet con esta misma información. Para la elaboración de estos materiales se aprovecharán los resultados de investigación, incluidas actividades, contenidos en tesis de maestría y doctorado en matemática educativa.

La experiencia de otros rediseños curriculares, incluido el vigente, muestra que no es suficiente con la elaboración de nuevos programas para que el profesor esté en condiciones de trabajar bajo ese nuevo enfoque. El profesor necesita mayores apoyos y disponer de materiales con los cuales se puedan cumplir los objetivos y enfoque del rediseño curricular. Los paquetes didácticos proporcionan ese apoyo.

En este diplomado participan los mismos profesores que estuvieron en el anterior diplomado.
En el tercer diplomado, con los mismos participantes, se elabora un plan de difusión y capacitación para el uso de los programas y los paquetes didácticos, además de planes de seguimiento de la puesta en práctica y evaluación de los programas. De esta manera se crean las condiciones para la comprensión, aceptación e incorporación de los nuevos programas por parte de los profesores de matemáticas de los CECyT del IPN, así como una evaluación que proporcione información válida y datos confiables que permitan evaluar el cumplimiento de las funciones de la institución. De esta manera se contribuye a la conformación de grupos de profesores capacitados en diseñar, instrumentar y evaluar el diseño curricular.

La última fase consiste en talleres para el manejo del rediseño curricular que se impartirán a profesores de todos los CECyT en distintas sedes. Los instructores de estos talleres serán quienes estuvieron en los diplomados. En estos talleres se elaborarán planes de actividades en el que se aprovecharán los materiales desarrollados en los paquetes y que se llevarán a las aulas y se documentará sus resultados. También estos talleres servirán para constituir una red de profesores en las que compartirán sus experiencias de los resultados positivos y dificultades en su trabajo con los alumnos. De esta manera se contribuye para la conformación de una red de interacción e innovación académica en matemáticas, en la que no sólo se encuentren profesores, sino también estudiantes y autoridades.

Participantes
Para la instrumentación de esta propuesta de desarrollo curricular no sólo participan profesores de matemáticas, también están involucrados la Dirección de Educación Media Superior (DEMS) para propiciar que se tengan las condiciones de trabajo de los profesores que tomarán el seminario, los diplomados y los talleres. También se requiere del apoyo del Centro de Tecnología Educativa particularmente en relación a los discos compactos que forman parte de los paquetes didácticos.

Por la estructura misma de la propuesta es imprescindible la presencia del Centro de Formación e Innovación Educativa (CFIE) y de la Dirección de Nuevas Modalidades Educativas (DNME). A través de ellos se gestionarían el seminario, los diplomados y los talleres, además del apoyo de asesores.

Conclusiones

Esta propuesta toma en cuenta los rediseños curriculares anteriores en el IPN en los que la distancia entre el currículum planeado y el logrado ha sido muy grande, en donde difícilmente se reconoce el modelo institucional en el trabajo de los profesores con sus alumnos. Se evita tener los nuevos programas justo al iniciar el semestre en el cual se debe aplicar, dejando desprotegido a los profesores ante los cambios involucrados en el rediseño.

Tal vez los tiempos propuestos en este diseño curricular parecen demasiado largos, pero sólo a partir de un trabajo constante y continuo se pueden lograr los cambios que requiere el Instituto y que sus alumnos merecen.

Bibliografía

AIM-NMS-IPN (1995) Diagnóstico de la Práctica Docente.
AIM-NMS-IPN (1997) Plan de Trabajo de la AIM-NMS-IPN.
ANUIES (2000) La Educación Superior en el Siglo XXI. http://www.anuies.mx/21
Batanero, C. (2001) Didáctica de la Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
Goñi, JM (coordinador) El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI. Editorial Graó, 2000.
IPN (2006). Geometría Analítica. Libro del Profesor. IPN. ISBN: 970-36-0258-4.
IPN (2004). Materiales para la reforma. Publicaciones 01 a 19. [en línea]. Disponible en: http://www.mreforma.ipn.mx/ [consultado el 9 de octubre de 2006]
IPN (2004). Geometría Analítica. Libro del Estudiante. IPN. ISBN: 970-36-0257-6.
IPN (2004). Álgebra. Guía del estudiante. Instituto Politécnico Nacional
Obra completa 970-36-0178-2. Obra individual 970-36-0176-6.
IPN (2004). Álgebra. Guía del Profesor. Instituto Politécnico Nacional. ISBN: 970-18-6931-1.
IPN (2003) Diseñemos el Futuro. Un Nuevo Modelo Educativo para el IPN. Propuesta. Materiales para la Reforma. Serie Textos. Documento de trabajo, versión 16, — México: IPN, 121 pp.
IPN (2001). Álgebra. Guía para el Estudiante. Instituto Politécnico Nacional. ISBN: Obra completa 970-18-6927-3. Obra individual 970-18-6931-1.

IPN (2001). Álgebra. Guía para el Profesor. Instituto Politécnico Nacional. ISBN: Obra completa 970-18-6927-3. Obra individual 970-18-6932-X.

IPN (1997) Evaluación del Plan de Desarrollo Institucional del Instituto Politécnico Nacional 1995-2000. http://www.eval.ipn.mx/eval/segevalpdi.htm

IPN (1994). Planes y programas de estudios de Matemáticas I, II, III, IV, V y VI. Documentos internos de trabajo. Dirección de Educación Media Superior.

OCDE (2000) Proyecto PISA. La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: la evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el proyecto Pisa / OCDE. — Madrid:Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE, 2001, 159 pp.

Oteiza, F. (1997) Estándares de Calidad en Educación, el inicio de un proceso en América Latina. Madrid: Épsilon 38, pp 159-184.

Presidencia de la República (2001) Bases para el Programa 2001-2006 del Sector Educativo. http://www.ifie.edu.mx/indice_programa_sectorial.htm

Rico L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1,* (1), 22-39.

Schmidt, W.H. et al. (1997) Many Visions, Many Aims, Volume 1. Kluwer Academic Publishers Netherlands.

SEP (1999) Perfil de la Educación en México. http://www.sep.gob.mx/documentosof2/perfil/perfil.html

LA UNIDAD DE ANÁLISIS: UNA HERRAMIENTA PARA LO PERIÓDICO EN UNA PRÁCTICA DE

Rosa Isela Vázquez, Gabriela Buendía
Universidad Autónoma de Chiapas.
iselavaz@hotmail.com,buendiag@unach.mx

Resumen

La identificación y uso de una *unidad de análisis* es el elemento que tiende un puente entre un tratamiento empírico de la periodicidad y uno científico lo cual favorece una construcción significativa del conocimiento matemático; ésta toma diferentes formas según el contexto en el que se desarrolle. La reconstrucción de significados que favorece esta herramienta permite que lo periódico transite significativamente en distintos escenarios. Nos interesa dar respuesta a cuestiones tales como ¿cómo se conforma la unidad de análisis? ¿cuál es el uso que se le da a la unidad de análisis? ¿de qué manera influyen los entornos en su uso y conformación? Presentamos resultados de las primeras indagaciones en diferentes entornos curriculares que nos permiten dar cuenta de cómo se conforma una *unidad de analisis* y el uso de ésta al seno de una práctica de predicción.

Palabras clave: Unidad de análisis, Socioepistemología, periódico, predicción,

Introducción

La disciplina Matemática Educativa atiende problemáticas relacionadas con la construcción de saberes en el área de la enseñanza de las matemáticas. Partimos en este escrito de la problemática respecto a lo periódico respecto al poco significado que puede tener como una propiedad que califica un cierto comportamiento. Por ejemplo, al pedir convertir una fracción a decimal periódico y pedir la cifra número 12, es común que la división tenga que realizarse doce veces o bien que el patrón hallado tenga que escribirse tantas veces como sea necesario para hallar la cifra doce. El comportamiento periódico del objeto en cuestión no es significativo.

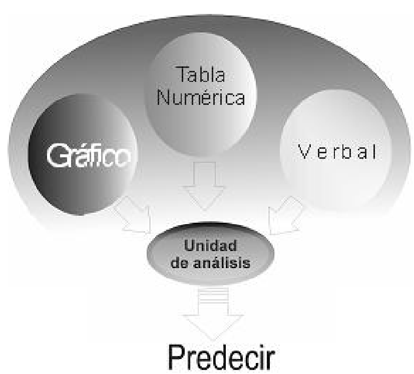
La propuesta es que esta problemática se origina al no reconocer el carácter social de matemática escolar pues lo periódico sólo parece estar asociado a la comprobación, y la consiguiente memorización, de una igualdad ($f(x) = f(x+a)$ para x en el dominio de f) relacionada con la periodicidad de las funciones. La propuesta es que se deben enfatizar aquellas prácticas sociales que posibilitan la generación de conocimiento matemático. Este aspecto social junto con las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva, interactúan de manera integral para explicar la constitución del saber. Esta es la llamada aproximación socioepistemológica y su tarea es formular epistemologías del conocimiento matemático que den cuenta acerca de aquellas

[1] *Esta investigación se realizó con el apoyo del proyecto estudio del desarrollo del saber matemático en un marco socioepistemologico (PROMEP/103.5/04/2927 Folio UACHIS-PTC-39)*

prácticas que anteceden a la generación del saber. Esto proporciona una base de significados para incidir con ella en el sistema escolar.

En ese marco, la socioepistemología de lo periódico que se ha propuesto (Buendía 2004, 2006) propone a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento significativo del aspecto periódico de las funciones. Recientemente, se ha podido dar cuenta de esta misma

socioepistemología para otros objetos periódicos como las series. Resulta de interés que en este reconocimiento articulado de la propiedad periódica, sobresale el uso y desarrollo de una herramienta que hemos llamado *unidad de análisis*. Si bien ésta toma diferentes formas según el contexto en el que se desarrolle, su identificación y uso favorece una resignificación del aspecto periódico del objeto en cuestión: no será lo mismo hablar de que se repite, sino que su forma de repetición será ahora significativa y puede usarse significativamente para poder predecir. Esta herramienta da forma a la práctica de predicción y ésta a su vez, va promoviendo el desarrollo de la herramienta. Así, es en el ejercicio de la práctica de predicción que podemos ver coherencia en conocimiento matemático a lo largo de todo el sistema educativo acerca del comportamiento periódico.



La unidad de análisis en la socioepistemología de lo periódico

Al predecir la posición, surge en primera instancia la búsqueda de alguna unidad de análisis que posibilita la comparación de estados futuros con el estado presente. Entre los primeros trabajos con relación a la socioepistemología de lo periódico se da cuenta que el uso que se hace de la unidad de análisis, en las gráficas de movimientos, se da en dos sentidos generales, el primero es el traslado del futuro al presente en el que se emplea la división como herramienta, y una segunda instancia es ir del presente al futuro, mediante la reproducción de la unidad encontrada.

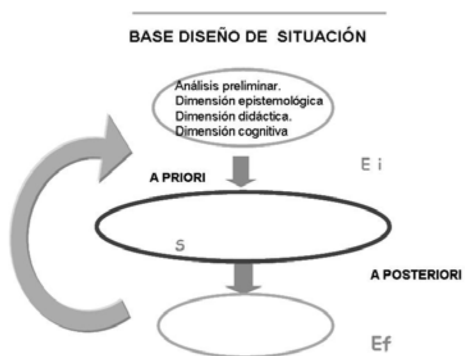
Por otra parte, en un contexto de tablas numéricas, Alcaraz (2005) da cuenta de la práctica de predicción con relación a lo periódico y hace uso de la descripción de movimientos repetitivos a través de ellas. Las tablas numéricas sirven para registrar los valores que toma cierta función ya que pretende que las gráficas no entren, necesariamente, al escenario argumentativo. Así, parte de un tratamiento numérico de lo periódico, conjeturando que a través de la práctica de predecir sobre fenómenos de movimientos repetitivos, se construye lo periódico. En el estudio efectuado, se aborda la relación tiempo-distancia y muestra que en la práctica de predicción para movimientos periódicos surgirá como herramienta lo periódico. Da evidencia de la aparición de una unidad de análisis, misma que se registra en el análisis de los datos numéricos que se muestran en las tablas.

La importancia de esta unidad de análisis para el estudio de lo periódico en un marco predictivo es que marca un momento en la *resignificación* de lo periódico ya que provoca una distinción útil entre aquello que se repite y el cómo se repite. Ello también nos habla de que dicha unidad de análisis tiende un puente entre un tratamiento empírico de la periodicidad y uno científico (Montiel, 2005), lo cual favorece una construcción significativa del conocimiento matemático.

Analizaremos la unidad de análisis y sus usos, explorando distintos contextos, que se emplean a lo largo de la curricula escolar. Tomando como antecedente la socioepistemología de lo periódico propuesta, se examinará cómo están presentes los elementos que la conforman; en particular, la identificación y uso de una unidad de análisis.

Metodología

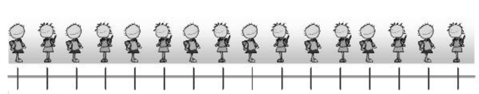
La construccion de las secuencias se da a partir del esquema que se contempla en nuestra vision sociooepistemológica, en la que la intención es proponer intencionalmente la práctica de predicción y observar lo que sucede entre los participantes, rescatando argumentos, interpretaciones y consensos, en la puesta en escena. En ella se ponen de manifiesto la identidad, cultura y diversas interpretaciones del fenómeno en cuestión.



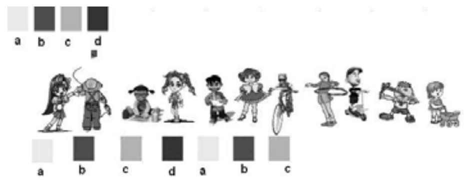
A continuación mostramos las secuencias con las que se ha indagado con estudiantes de diferentes niveles: básico, medio, medio superior y superior, al dar respuesta a la solicitud de descripción del objeto en cuestión y de realizar diferentes tipos de predicciones. Nuestro interés está en dar cuenta de ¿cómo se conforma la unidad de análisis?, ¿cuál es el uso que se le da a la unidad de análisis?, ¿de qué manera influyen los entornos en su uso y conformación?

<u>Secuencia Sucesiones</u>

1.-De la siguiente fila de niños, indica si es ¿un niño o una niña, quien esta formando en marca número 20 En la fila el lugar numero 102, ¿lo ocuparía un niño o una niña?



2.- Para terminar la semana quiero regalarle chicles de sabores de menta (a), tutifruti (b), hierbabuena (c) y canela (d) a mis amigos del colegio, siguiendo ese orden. Ellos son 25. Quiero saber ¿de qué sabor le tocará al último de la fila mostrada? ¿De qué sabor le tocará a mi amigo número 25?



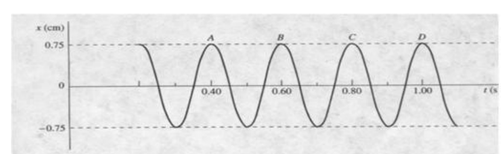
3.- Voy a decorar una pared de mi habitación que mide cuatro metros con una cenefa de figuras, como la de la muestra. Necesito saber: ¿qué figura quedará en la esquina?

4.-Supóngase que tenemos una muestra de los siguientes bordados para adornar la orilla de los puños de un camisa de manta.
El puño de la camisa mide 20 centímetros.

Al adornar nuestro camisa, ¿la figura del bordado que está marcada en color blanco quedará completa en el puño?

Secuencia Funciones

1. La siguiente gráfica describe el movimiento de una partícula sobre una recta horizontal, durante un tiempo determinado. La distancia (x) se mide en centímetros y en tiempo (t) en segundos.
a) Describa el movimiento de la partícula
b) ¿Cuál es la posición de la partícula a los 3 segundos?
c) ¿Cuál será su posición en el segundo 124?

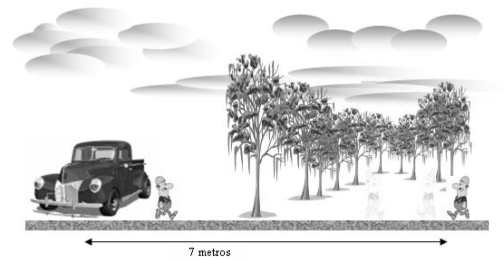


2.-Suponga que tomamos datos del recorrido de una persona, durante un tiempo determinado.
Describa como se mueve la persona.
¿En el segundo 124 en donde se encontrará?

T	D
1	2.3
2	4.6
3	6.9
4	4.6
5	2.3
6	0
7	2.3
8	4.6
9	6.9
10	4.6
11	2.3
12	0

3.- La cosecha de frutas se recolecta en canastos que se llevan a un camión a 7 metros de distancia del huerto. El recorrido de ida y vuelta se hace en un tiempo de 25 segundos. , Cuatro minutos después de haber iniciado, ¿ en dónde se encontrará el recolector?

¿En qué lugar estará en el segundo 152?



Resultados de exploraciones

Las primeras actividades de la secuencia de Sucesiones, fueron puestas con Dulce, estudiante de primer año de primaria. Ella nos comentó que sabe sumar y además, contar de 10 en 10 y de 100 en 100.

Actividad 1.

a) Fue contando los niños de uno en uno en la fila de la figura que se presenta y como sólo hay 16 niños, para el número 17 se remitió al inicio la fila hasta completar 20.

b) Siguió el mismo procedimiento que en el inciso a) volviendo a repetir los niños de la fila presentada en la actividad hasta completar 102.

Actividad 2

Para realizar esta actividad, se le proporcionaron físicamente cajitas de chicles de los cuatro sabores. Su primer intento fue realizar el mismo procedimiento de contar de 1 en 1, por lo que se le facilitó el trabajo primero dándole dos sabores e irle incorporando poco a poco los otros dos sabores. Ella iba acomodando por filas los sabores siguiendo un orden.

Dulce con diferentes sabores de chicles *Identificación y uso de la unidad de*

Análisis

Ya que tuvo los 4 sabores de nuevo al pedirle otra cantidad más lejana para el número de niños se percató de que con 8 chicles podía ir repitiéndolos, sumando de 8 en 8. Cuando se le pidió qué sabor le tocaría al niño 23, sumó 3 veces 8 y después le resto un chicle diciendo que le tocaría de sabor hierbabuena. Posteriormente se le solicita predecir el sabor del niño 16, 18 y 22 y siguió el mismo patrón que ya había identificado.

Actividad 3

Se le facilitó una muestra física de cenefa con figuras en un orden de cara, mano, estrella y un metro elaborado con instrumento de apoyo. Con el material, realizó varios intentos de ubicar las figuras relacionando el espacio que ocupaban sin ocuparse de la medida de cada uno de los cuadros que contenía las figuras. Esta última actividad no se logró concluir ya que la niña no tenía los suficientes conocimientos respecto a unidades de medida para poder realizarla. Sin embargo, notamos que la niña reconocía el patrón que debía seguir la cenefa y el mismo orden.

Respecto a la secuencia de Funciones, se realizaron exploraciones en diversas ocasiones: Fernando y Beny, ingenieros en Sistemas egresados del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez; Luis, estudiante de noveno semestre de la Licenciatura en Pedagogía; Alejandra estudiante de maestría, con una formación de Licenciatura en Matemáticas; Claudia, quien estudió únicamente primer grado de secundaria a quienes se les solicitó respondieran a las actividades. Ya que se trata de primeras actividades de exploración, mencionaremos algunos detalles significativos.

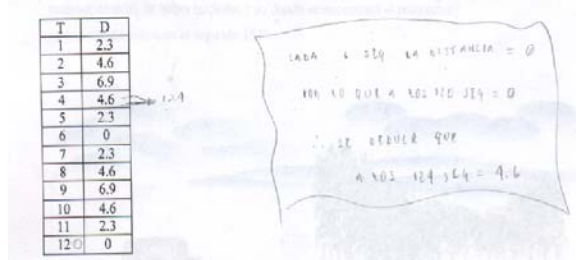
Actividad 1.
a) Describa el movimiento de la partícula, b) ¿Cuál es la posición de la partícula a los 3 segundos? , c) ¿Cuál será su posición en el segundo 124?

Fernando: la partícula se mueve de forma regular, es decir, va y viene.

Fernando recurre a operaciones concretas en la búsqueda de un resultado numérico, que le permita dar el resultado que se le solicita, de manera natural al ver la grafica asume que es periódica y que se corresponde a la función seno.

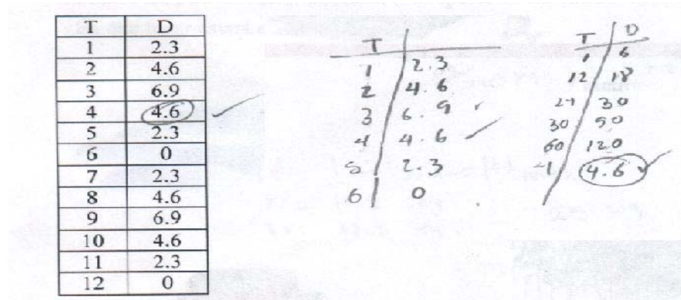
Actividad 2
Describa como se mueve la persona. En el segundo 124, ¿en dónde se encontrará?

Fernando: la persona se mueve de manera repetida, es un ir y regresar al lugar de donde parte.
En el análisis de la tabla identifica una unidad de análisis a partir de identificar como se van repitiendo los datos; enseguida se recurre a la operación: una proporción.



T	D
1	2.3
2	4.6
3	6.9
4	4.6
5	2.3
6	0
7	2.3
8	4.6
9	6.9
10	4.6
11	2.3
12	0

Beny elabora dos tablas, la primera es la proporcionada en la actividad, la segunda la hace considerando valores enteros referidos al tiempo que le lleva un recorrido..



T	D
1	2.3
2	4.6
3	6.9
4	4.6
5	2.3
6	0
7	2.3
8	4.6
9	6.9
10	4.6
11	2.3
12	0

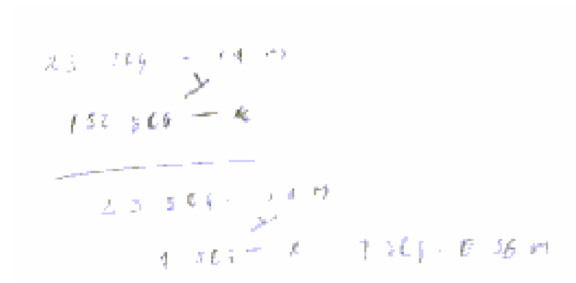
Actividad 3

Cuatro minutos después de haber iniciado, ¿en donde se encontrará? ¿En qué lugar estará en el segundo 152?

Fernando. Traza de manera inicial el recorrido descrito para establecer un ciclo completo, es decir, el tiempo que el hombre tarda.

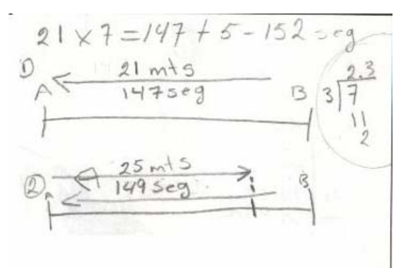
Recurre a operaciones, extrae datos ,identifica la distancia como 7 metros, multiplica estos por 2 y marca un tiempo de 2.5 segundos.

2.5 segundos es a 14 metros, como 152 segundos es a el dato buscado.



Beni intenta resolver, identifica datos como son distancia, involucra la formula de velocidad, pero no concluye.

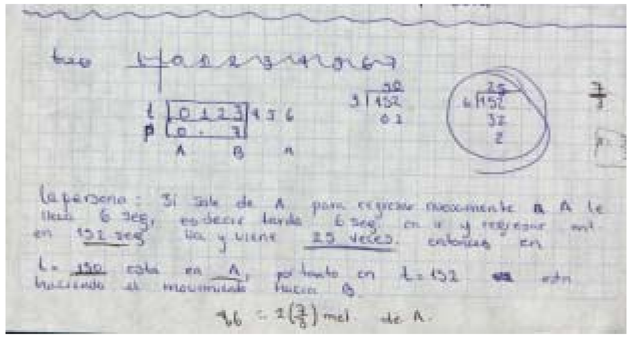
Luis traza el ir y venir después divide 152 entre 7 obteniendo 21.7 recorridos. en seguida, divide 7 entre 3 ,obtiene 2.37 metros por segundo. Posteriormente multiplica 21 por 7, obtiene 147 y suma 5 para llegar a 152 segundos. Después establece que en 150 segundos recorre 27 metros. Analiza la posición en un trazo como se muestra en la figura.



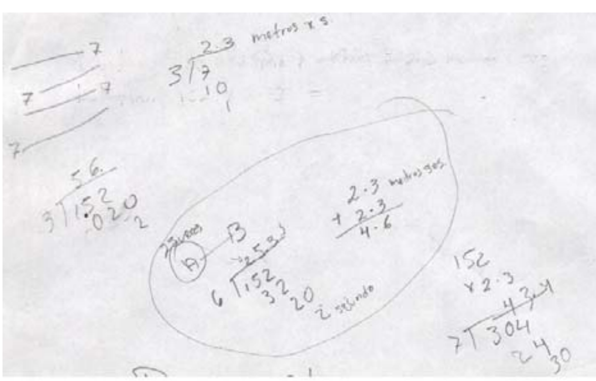
Alejandra:

Si sale de A para regresar nuevamente a A le lleva 6 segundos, es decir tarda 6 segundos venir y venir en total en 152 segundos va y viene 25 veces entones

t = 150 esta en a, por tanto en t = 152 esta haciendo el movimiento hacia b.



Claudia traza el recorrido, divide la distancia de 7 metros entre el tiempo 3 segundos, y encuentra 2.3 metros por segundo; después divide 152 segundos entre 3,observa y divide 152 entre 6 encuentra como resultado que de A a B hay 25 veces, el residuo es 2; con ello suma 2.3 mas 2.3 y encuentra que el recolector esta a 4.6 metros del punto A



Discusión

Pretendemos mostrar cómo la identificación y uso de la unidad de análisis permitirá la articulación de los diferentes contextos y consecuentemente un saber matemático respecto a lo periódico más funcional y significativo. La identificación y uso de una unidad de análisis surge al pretender predecir la posición de un móvil que nos va a permitir comparar estados futuros con estados presentes del objeto en cuestión.

En las exploraciones podemos constatar que teniendo como marco de referencia la socioepistemologia de lo periódico, de manera particular en el momento de la identificación y uso de la unidad de análisis, observamos que ésta se conforma de acuerdo al entorno en que se presenta una actividad de corte predictivo y se usa de formas distintas. Aunado a ello, podemos dar cuenta que la identidad y formación académica del individuo es elemento fundamental de la construcción de ésta. Es claro que los participantes cuentan con referentes distintos y éstos les proveen de herramientas y argumentos diferentes para poder establecer la unidad de análisis, y en un segundo momento predecir la posición de un móvil; advertimos una fuerte presencia de argumentos analíticos en la secuencia de funciones, sin embargo en el caso de las actividades de secuencias, las acciones se vieron efectuadas de manera sencilla a nivel de argumentos verbales y conteos simples.

Con la realización de este estudio se da evidencia de que todo aquello que tiene que ver con la periodicidad en un sentido institucional, histórico y cultural puede conformar un lenguaje que le da un significado útil al conocimiento matemático. Las puestas en escena dan cuenta de que la unidad de análisis, se conforma y transforma de acuerdo a los diferentes contextos en los que se trabaja, está implícita la articulación que se pretende obtener con intencionalidad. La identificación de patrones y la utilización de estos, dan cuenta de cómo la práctica social de predicción, se transforma en el argumento que a través de significados y procedimientos situacionales favorece una reconstrucción de significados acerca de lo periódico.

El primer momento puede identificarse como un reconocimiento del comportamiento del objeto. En un segundo momento el estudiante se encuentra inmerso en la búsqueda de una unidad de análisis para manipularla auxiliándose de operaciones como la división o la multiplicación en un intento de establecer la posición. Así, los diferentes contextos abordados muestran la convergencia de acción del individuo en la imperante necesidad de establecer y reconocer una unidad de análisis como una herramienta para poder predecir. En el ejercicio de esa práctica y en el reconocimiento de dicha herramienta pueda hablarse de una resignificación de lo periódico.

Lo anterior nos coloca en la condición de mostrar, como la identificación y uso de la unidad de análisis puede permitir la articulación de los diferentes contextos y consecuentemente un saber matemático respecto a lo periódico más funcional y significativo

Referencias Bibliográficas

Alcaraz,R. (2006) *Lo periódico, una construcción de la numerización del movimiento*. Tesis de maestria . México: Facultad de matematicas. Universidad Autónoma de Guerrero.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales.* Tesis doctoral. Cinvestav_IPN, México.

Buendía, G. (2005). *Lo periódico: una revisión en el marco de la socioepistemología.* Capítulo aceptado para su publicación. Universidad Autónoma de Guerrero

Duran, R. (1994). Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria. Tesis de maestría Cinvestav_IPN México.

Montiel,G.(2005) *Estudio socioepistemologico de la función trigonometrica* Tesis de doctorado. Mexico: Cicata-IPN.

Libros de texto gratuitos de matemáticas. SEP, Nivel Básico, Serie Ciclo Escolar 2003-2004.

Suárez (2000) El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas. Tesis de maestría: México: Cinvestav-IPN

EL POSGRADO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA EN GUERRERO. DESARROLLO Y PERSPECTIVAS

Crisólogo Dolores Flores
Centro de Investigación en Matemática Educativa, UAG
cdolores@prodigy.net.mx; cdolores@hotmail.com

Resumen

Con la creación de la Maestría en Matemática Educativa del Cinvestav en 1975 se crea la instancia en México para la formación de posgraduados en esta área. Esta experiencia es diseminada en la década de los ochentas en varias partes del país. Sin embargo la simiente más fructífera ha tenido lugar en la Universidad Autónoma de Guerrero. Este posgrado fue instituido en el año de 1979 y daba cobertura en principio a profesores de matemáticas de esa entidad. En el marco del PNAFAPM en el año de 1986 se crea la Licenciatura en Matemática Educativa, esto trae consigo la conformación de la Facultad de Matemáticas. A finales de la década pasada y principios de la actual la Maestría en Matemática Educativa de la UAG ha centrado sus esfuerzos en el mejoramiento de la calidad, de la competitividad y de la integralidad del posgrado. En este empeño ha logrado ingresar al Programa Integral de Fortalecimiento del Posgrado (PIFOP) en abril de 2005 y más recientemente, en agosto de 2006, logro su aceptación en el Padrón Nacional de Posgrado (PNP). Sus retos y perspectivas en un futuro inmediato se cifran en mantener a la maestría en el PNP e incorporar al Doctorado a este mismo padrón, así como convertir al posgrado en un posgrado integral (Doctorado Directo) que contenga a la maestría como salida lateral y al doctorado como salida terminal. En este documento se analiza y describe este desarrollo, se plantean las perspectivas y se reconocen los retos más acuciantes que enfrenta.

Palabras clave: posgrado, matemática educativa, desarrollo, perspectivas

Desarrollo del posgrado

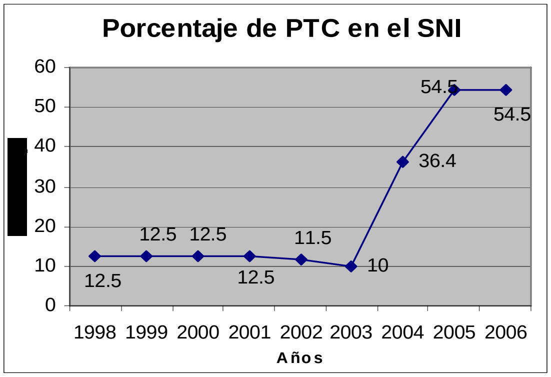
La Maestría en Matemática Educativa (MME) fue uno de los primeros posgrados creados en el Estado de Guerrero y en la UAG, recientemente cumplió de 27 años de existencia. Fue formalmente instituido el 9 de noviembre de 1979 (Alcaraz, Marmolejo, Marmolejo y Mercado 1983)[i]. Su planta académica inicial se conformó de un grupo de cuatro profesores de la UAG que hicieron la maestría en la Sección de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN en la ciudad de México. En un principio tenían acceso una amplia gama de profesores de matemáticas en servicio. Para aquel entonces era ya conocida la fragilidad de la formación y actualización de los profesores de matemáticas del país. Por eso desde principios de los años ochenta se hizo frente a este problema mediante el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (PNAFAPM). Programa que involucró a profesores y estudiantes de la MME. El PNAFAPM fue adoptado por la UAG, y sobre la base de éste se creó la Licenciatura en Matemática Educativa en el año de 1986. Este hecho trajo consigo la creación de la Facultad de Matemáticas al interior de la UAG y su consecuente incursión hacia otras esferas de penetración de la matemática, como la Estadística, la Computación y las Matemáticas Básicas. Este eslabón natural anterior del posgrado, fue creado después del posgrado mismo.

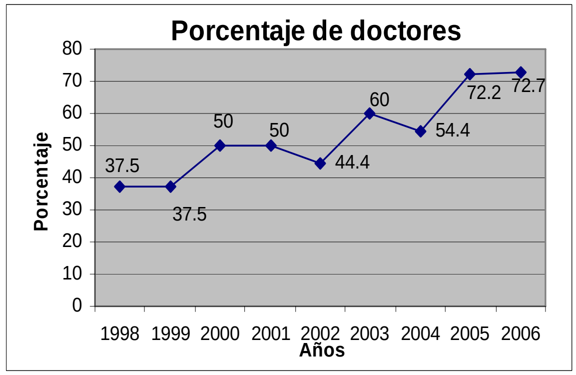
Actualmente el área de Matemática Educativa en cuenta con los niveles de licenciatura, maestría y doctorado. Este último fue aprobado por el H. Consejo Universitario de la UAG el 28 de marzo de 1990 pero su funcionamiento fue posible hasta septiembre de 2005, hoy día ocho estudiantes hacen estudios en este nivel y constituyen la primera generación de este posgrado. El desarrollo del posgrado de Matemática Educativa en la UAG ha estado ligado al desarrollo que esta área ha tenido en la universidad. La primera etapa se inició en 1979 con la fundación de la maestría, la segunda etapa se inicia con la instauración de la Licenciatura en Matemática Educativa en el año de 1986 y la consiguiente conformación de la Facultad de Matemáticas. La tercera etapa se inicia con el relanzamiento de la Maestría en Matemática Educativa hacia nuevos horizontes y se ubica en el tiempo con los inicios de la actual década, en este empeño los esfuerzos han estado centreados en mejoramiento de la calidad, de la competitividad y de la integralidad del posgrado. En los últimos años la UAG en su conjunto se ha estado esforzando por transformarse en una institución de educación superior de calidad. Congruente con estos esfuerzos el posgrado de matemática educativa ha logrado en primera instancia ingresar al Programa Integral de Fortalecimiento del Posgrado (PIFOP) en abril de 2005 y más recientemente, en agosto de 2006, al Padrón Nacional de Posgrado (PNP). Sus retos y perspectivas en un futuro inmediato se cifran en mantener a la maestría en el PNP e incorporar al Doctorado a este mismo padrón, así como convertir al posgrado en un posgrado integral (Doctorado Directo) que contenga a la maestría como salida lateral y al doctorado como salida terminal.

Retos y perspectivas de desarrollo

Desde finales de la década pasada nos hemos propuesto dar un impulso trascendente al posgrado de matemática educativa. Esto requería del fortalecimiento de sus cinco componentes fundamentales: Planta académica, eficiencia terminal, orientación, vinculación y recursos financieros.

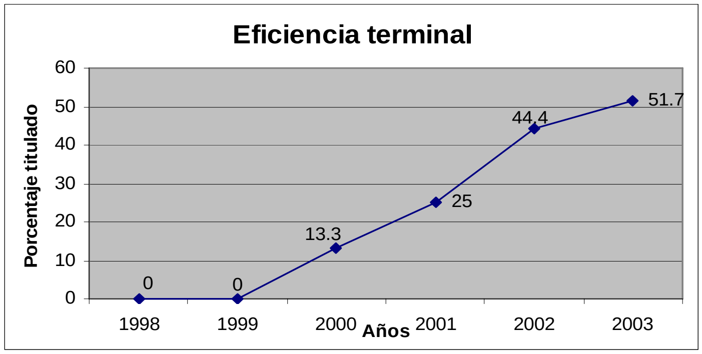
Planta académica. Las características del núcleo académico de nuestro posgrado se han venido mejorando significativamente los últimos cinco años. Este mejoramiento ha sido posible gracias a que hemos puesto en práctica varias estrategias entre las que se destaca, la atracción de profesores tanto del interior de la DES como del exterior de la misma. En el año 2000 teníamos 8 Profesores de Tiempo Completo (PTC) en total, 4 maestros en ciencias y 4 doctores, sólo un PTC estaba incorporado al SNI en ese año. Para 2002 aumenta en uno el número de maestros en ciencias y el de doctores se mantiene en 4. En 2003 aumenta en uno el número de doctores, de modo que suma 10 PTC, 6 doctores y 4 maestros en ciencias. De 2003 en adelante hay un mejoramiento más acelerado de la cantidad y calidad del núcleo académico básico. En 2004 hay 6 doctores y 5 maestros en ciencias, y para ese año suman ya 4 PTC en el SNI, éstos representan el 36.4 % del núcleo académico. Para 2005 se incrementa a 8 el número de doctores y 3 maestros en ciencias, además para ese mismo año 6 de nuestros PTC ya están incorporados en el SNI.





El personal académico que sostiene al posgrado a pesar de que satisface las condiciones básicas aún tiene el reto de la suficiencia, la productividad y la dedicación. Una planta académica es suficiente si garantiza el funcionamiento regular del programa, es decir, si tiene los profesores de tiempo completo necesarios para impartir los cursos, dirigir tesis, dar tutoría a los estudiantes, etc. A pesar de que estos requerimientos se satisfacen todavía nuestro posgrado requiere engrosar y fortalecer su planta académica, sobre todo de de profesores con pertenencia al SNI, de manera que se alcance y conserve tener a la mitad de la planta académica en ese sistema. La productividad está directamente ligada a las Publicaciones, tesis dirigidas, patentes, ponencias en eventos, informes y asesorías técnicas. Nos planteamos que nuestros PTC publiquen al menos un artículo anualmente, que asistan como ponentes al menos en un evento al año y que gradúen al menos dos estudiantes en ese mismo periodo.

La eficiencia terminal. En una universidad tan politizada como la nuestra, los asuntos relativos a la calidad de la educación superior no formaban parte de las políticas y la praxis universitarias. En nuestro posgrado, desde que nos propusimos mejorarlo sustancialmente para incorporarlo primero al PIFOP y después al PNP, este indicador se ha estado atendiendo sistemáticamente, en contra de las dinámicas universitarias tradicionales que aún persisten en nuestro alrededor. En el año 2000 era apenas de 13.3%. En 2001 crece hasta alcanzar el 25%. En 2002, sigue creciendo hasta 51.7%. La tasa de crecimiento de 2000 a 2001 es de 11.7%, de 2001 a 2002 es de 19.4 y de 2002 a 2003 es de 7.3%. Como se puede apreciar, el índice de crecimiento de la eficiencia terminal por cohorte generacional es siempre positivo. Y la proporción de estudiantes que se gradúa en el tiempo promedio es mayor al 50%. No estamos satisfechos con estos logros, por tanto estamos poniendo en práctica estrategias puntuales de seguimiento de la trayectoria escolar para que las generaciones de 2004 en adelante se gradúen oportunamente. Prueba de ello es que a estas fechas aproximadamente el 40% de los estudiantes que ingresaron en 2004 ya están terminando sus trabajos de tesis. Esta información se ilustra en la siguiente gráfica.



No obstante los logros alcanzados tenemos dos retos: reducir al mínimo el periodo comprendido entre ingreso y la graduación y alcanzar el 70% de eficiencia terminal por cohorte generacional. Para lograrlo hemos mejorado nuestros procedimientos de ingreso y reducido el índice de estudiantes por profesor de tiempo completo, estamos también mejorando la atención individual y colectiva de los estudiantes.

La orientación del programa. El objetivo general de nuestra maestría es formar posgraduados de alta calidad con valores éticos y responsabilidad social en el campo de la e-a de la matemática, para que sean capaces, por un lado de mejorar tal proceso de manera que produzca resultados exitosos en el aprendizaje de los estudiantes, y por otro que sean capaces de realizar investigación científica en el mismo campo. Asumimos que el mejoramiento de este proceso tiene mejores posibilidades de éxito si le antecede un trabajo científico serio y responsable. Nuestro posgrado tiene una orientación hacia la **investigación**, pero en su modalidad de programa **intermedio**[ii]**.** Son tres las razones fundamentales por las cuales hemos ubicado a nuestro posgrado en esta categoría: por el tipo de problemática que ha tomado como objeto de estudio, por el destino que tienen sus egresados y por razones geohistóricas. La enseñanza de las matemáticas y de las ciencias en general ha llamado la atención en México, en principio por los altos índices de reprobación y deserción que se registran año con año, los resultados de evaluaciones hechas por la OCDE ubican al Sistema Educativo Nacional con las carencias más bajas de los estudiantes mexicanos y éstas están registradas en comprensión escrita, matemáticas y ciencias. Este problema está asociado a varias causas, una de ellas es la desprofesionalización del campo, una parte significativa de los profesores de matemáticas del Sistema Educativo Nacional no fueron preparados para tal fin, aunado a esto existe una endeble y deficiente formación y actualización de los profesores de matemáticas en servicio. Otra de las causas está ligada a que, las transformaciones para la mejora de la enseñanza eran hechas tradicionalmente de manera empírica, hoy día hay interés por enfrentar ese problema desde la investigación científica. Sin embargo hay escasez de científicos activos en Matemática Educativa en nuestro país; por mencionar un dato indicador, el número de matemáticos educativos en el SNI no llega ni a 20. De acuerdo con nuestros estudios de egresados, alrededor del 80% de nuestros graduados se dedican a la práctica profesional centrada en la e-a de la matemática y la otra, a actividades de investigación, dirección o evaluación de programas educativos ligados a este mismo campo. Con la cancelación de la Escuela Normal Superior (ENS)[iii] en Guerrero, la atención hacia la formación de profesores de matemática y la investigación en Matemática Educativa tenía un destino incierto. La Maestría en Matemática Educativa, a principios de los 80´s se convirtió en una alternativa para proseguir cultivando y atendiendo ese espacio. La Licenciatura en Matemáticas de la UAG atendió desde 1986 el problema de la formación de profesores de matemáticas, así le confiere al posgrado la investigación y el perfeccionamiento profesional en el campo. En este sentido el reto más acuciante que enfrenta el posgrado es el de acercar aún más la formación de los egresados a la problemática que en cuanto a la e-a de la matemática padece el sistema educativo estatal y nacional. En los últimos cinco años la orientación de la formación de nuestros egresados ha estado más cercanamente ligada a la investigación. Si bien esta formación ha estado incidiendo en el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática de los campos de influencia de nuestros egresados, hace falta responder a la demanda educativa que reclama principalmente: mejor formación y actualización de profesores de matemáticas, diseño e incorporación de métodos y técnicas de e-a, diseño y evaluación de la curricula de matemáticas, diseño y uso de textos y materiales de apoyo, uso y aplicaciones de las nuevas tecnologías en las e- a de la matemática, etc.

La vinculación y cooperación. Las actividades sustantivas del quehacer universitario se centran en preservar, trascender, aplicar y difundir el conocimiento en beneficio de la sociedad. En particular al nuestro posgrado le corresponde trascender, aplicar y difundir el conocimiento propio del área a fin de que contribuya a la solución de problemática implicada en la e-a de la matemática. Tal y como ya ha se reconocido nuestra vinculación con la problemática de la e-a de la matemática aún es insuficiente y ésta se ha convertido en un reto que tenemos que enfrentar creadoramente. Por otro lado para cumplir sus funciones el posgrado requiere de la cooperación y colaboración de sus pares tanto del país como del extranjero. En este sentido nuestro posgrado mantiene, cooperación con otros posgrados afines y centros de investigación que confluyen en el CLAME y la Red de CIMATE´s. No obstante el reto que enfrenta es el de ampliar su cooperación y colaboración con instancias e investigadores de fuera del país e incluso con grupos afines laboran dentro de la República Mexicana.

Recursos financieros. Los recursos financieros para operación del posgrado proviene de dos fuentes principales: de los proyectos de investigación y desarrollo obtenidos por los profesores a través de concursos abiertos, y de la subvención institucional. El hecho de pertenecer al PNP coloca al posgrado en condiciones favorables en la competencia por la obtención de recursos externos. El reto que enfrenta en el futuro inmediato el posgrado radica en generar la capacidad para competir por recursos externos, pues las posibilidades de financiamiento interno en la UAG son cada vez más cercanas a cero.

El posgrado juega un papel de primera importancia en la formación de cuadros de alto nivel, para que sean capaces tanto de contribuir al mejoramiento de la e-a de la matemática como de contribuir al desarrollo de la disciplina Matemática Educativa o Didáctica de la Matemática como se le conoce en otras latitudes. Hoy día la oferta de posgrados de matemática educativa con reconocimiento de Alto Nivel por parte del Conacyt en el país se reduce a sólo dos, el ya existente en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav y recientemente el del CIMATE de la UAG, dependiente de la Facultad de Matemáticas. Este logro ha sido el más importante en la vida académica de este posgrado, por tanto los retos ya descritos marcaran el sendero de desarrollo tanto del posgrado mismo como de la Matemática Educativa. Estos avances han sido posibles también gracias al dinamismo y el nivel de cooperación logrado por el grupo CLAME y la red de CIMATEs de los cuales nuestro posgrado es coparticipe.

LA ENSEÑANZA DE LA MODELACIÓN EN CLASE DE FÍSICA Y DE MATEMÁTICAS EN ÚLTIMO AÑO DE PREPARATORIA EN FRANCIA

Ruth Rodríguez Gallegos
Equipo **I**nformática et **A**prendizaje de las **M**atemáticas (**IAM**)
Universidad Joseph Fourier Grenoble, Francia – México
Ruth.Rodriguez@imag.fr
Investigadores Jóvenes

Resumen

En el 2002, la introducción de nuevos planes de estudio para el bachillerato en Francia, muestra la gran importancia que se tiene actualmente sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelación, principalmente en disciplinas científicas como Matemáticas y Física. En los programas oficiales y libros del último año de preparatoria se puede observar la introducción de la noción de ecuación diferencial como objeto de estudio pero también como herramienta para modelar diversas situaciones físicas.

En esta investigación, nos interesa caracterizar el proceso de modelación en dos instituciones diferentes: la clase de matemáticas y la clase de física en el último año de preparatoria. Nos apoyaremos en un praxeológico de manuales escolares así como en observaciones en clase para caracterizar el tipo de enseñanza que existe actualmente y para identificar el tipo de tareas y técnicas a las cuales los alumnos son confrontados cuando el objeto ecuación diferencial es introducido como modelo de diversas situaciones físicas. En particular, nuestro estudio se centra en el estudio de los circuitos eléctricos.

Palabras Claves : *modelación matemática, física, ecuación diferencial*.

Introducción

Esta investigación está motivada por el creciente interés que a nivel mundial, y en particular en Francia, se ha observado en los últimos años de mostrar a los alumnos la utilidad de las Matemáticas en otros dominios de la ciencia.
A nivel mundial el proyecto PISA[42] establece que la cultura matemática es un objetivo de formación del futuro ciudadano del siglo XXI. Esta cultura es definida como "*la capacidad de un individuo para identificar y para comprender el papel jugado por las matemáticas en el mundo*". PISA privilegia los conocimientos y las habilidades de los alumnos para resolver problemas de la vida real ya que fuera del contexto escolar los alumnos serán confrontados a situaciones problemáticas en las cuales deberán hacer uso de sus conocimientos matemáticos. Los nuevos programas oficiales de preparatoria en Francia, puestos en práctica desde el 2002, también

[42] Proyecto de los países de la OCDE que estudia, desde 1997, los resultados de los sistemas educativos de 43 países en términos de los conocimientos adquiridos por jóvenes de 15 años en las áreas de lectura, matemáticas y ciencias.

destacan el papel de las Matemáticas como disciplina al servicio de otras ciencias. El fin del liceo es la culminación de los estudios secundarios y abre las puertas a los estudios superiores.
"*Las carreras en la universidad son naturalmente diversas y ofrece a las matemáticas un lugar variable. Para algunos alumnos, ella será una materia central pero para todos es una herramienta de cálculo y de modelación*"
(programa oficial de Matemáticas, p. 64).

La modelación en Matemática Educativa

Una referencia sobre las investigaciones realizadas alrededor de la enseñanza de la resolución de problemas y de la modelación a inicios de los 90's es el trabajo de Blum et Niss (1991). Los autores definen como problema cuando una situación nos conduce a interrogarnos sobre ella y sobre la cual no disponemos de métodos o algoritmos directos para responder a determinadas preguntas. Estos autores distinguen dos tipos de problema: matemáticos y aplicados. Los problemas aplicados, situados desde un inicio en el "*mundo real*" (el resto del mundo fuera de las matemáticas) son de interés en nuestro trabajo El paso entre una situación real hacia la construcción de un modelo matemático es denominado modelación por Blum y Niss en esa época. Esta definición evolucionará en trabajos posteriores.

La aparición de la modelación en foros internacionales, como el Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME) y el Congreso Internacional de la Enseñanza de la Modelación y Aplicaciones (ICTMA)[43], como objeto de estudio desde inicios de la década de los 90's hasta nuestros días, es una muestra de la importancia y el interés que ha tomado el tema en la comunidad de Matemática Educativa.

Es importante señalar la existencia del estudio ICMI[44] 14 "Aplicaciones y Modelación en Matemática Educativa" (Blum, 2002) lanzado, en el 2002, por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI). El estudio tiene como finalidad de reflexionar sobre el estado de arte actual de este tema y de proponer direcciones posibles para la práctica y la investigación alrededor de la modelación[45].

Modelo del proceso de modelación

Blum (2002) retoma, en ICMI 14, parte de los elementos teóricos introducidos en su trabajo anterior (Blum y Niss, 1991) pero esta vez precisa que "es común utilizar el término de modelación matemática en el sentido del proceso completo que consiste a estructurar, modelar, trabajar matemáticamente e interpretar/validar (en ocasiones varias veces)". Un aspecto interesante es la introducción de la etapa de "*modelo real*" como una etapa intermediaria entre la situación real de inicio y el modelo matemático.

[43] Congreso realizado cada dos años desde 1983. Las actas permiten observar una serie de ejemplos de estudios y de contribuciones a este tema en todos los niveles escolares.
[44] Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, siglas en Inglés).
[45] Una conferencia preliminar fue realizada en Alemania (2004) y el resultado del estudio ICMI 14 está próximo à publicarse. Fecha posible de publicación diciembre 2006 por la editorial Springer.

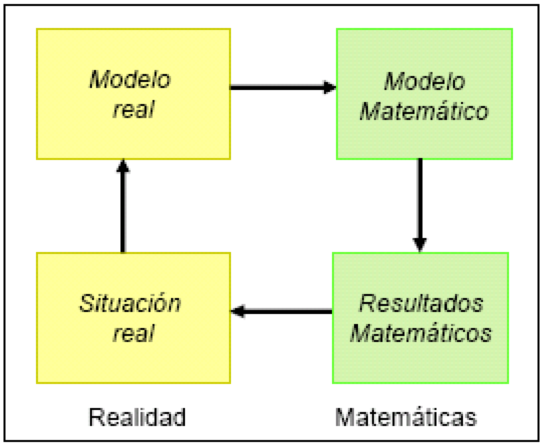


Figura 1: Esquema de modelación de Blum y Niss (1991).

Esta misma distinción ya ha sido realizada por Henry (2001) donde este autor distingue la etapa de "*modelo pseudo-concreto*" en la cual una elección de los aspectos pertinentes de la situación inicial con respecto a una pregunta es llevada a cabo, ignorando los aspectos no relevantes y donde se establecen las primeras hipótesis, en ocasiones de manera explícita aunque la mayor parte del tiempo implícitamente. La existencia de esta etapa intermedia citada por Blum así como por Henry es primordial en nuestro trabajo ya que del punto de vista de la enseñanza permite al alumno pasar gradualmente de una situación abierta (dominio de la realidad) a un modelo matemático preciso (dominio matemático).
Otro trabajo importante es el realizado por Borromeo (2006) donde ella propone la incorporación de la etapa de "representación mental". Esta es una etapa intermedia entre la situación real y el modelo pseudos concreto. Para Borromeo, en esta etapa es posible describir el tipo de procesos internos con respecto a la imagen mental del individuo durante y después de la lectura de una tarea de modelación relativamente compleja. El objetivo del trabajo de Borromeo es estudiar el proceso de modelación desde una perspectiva cognitiva. A partir de los esquemas de modelación propuestos (Blum 1991 y 2002; Henry, 2001; Borromeo, 2006), estableceremos nuestro modelo del proceso de modelación de referencia para nuestros análisis posteriores. El proceso de modelación de referencia será conformado por 8 etapas las cuales ilustramos a continuación con el siguiente esquema:

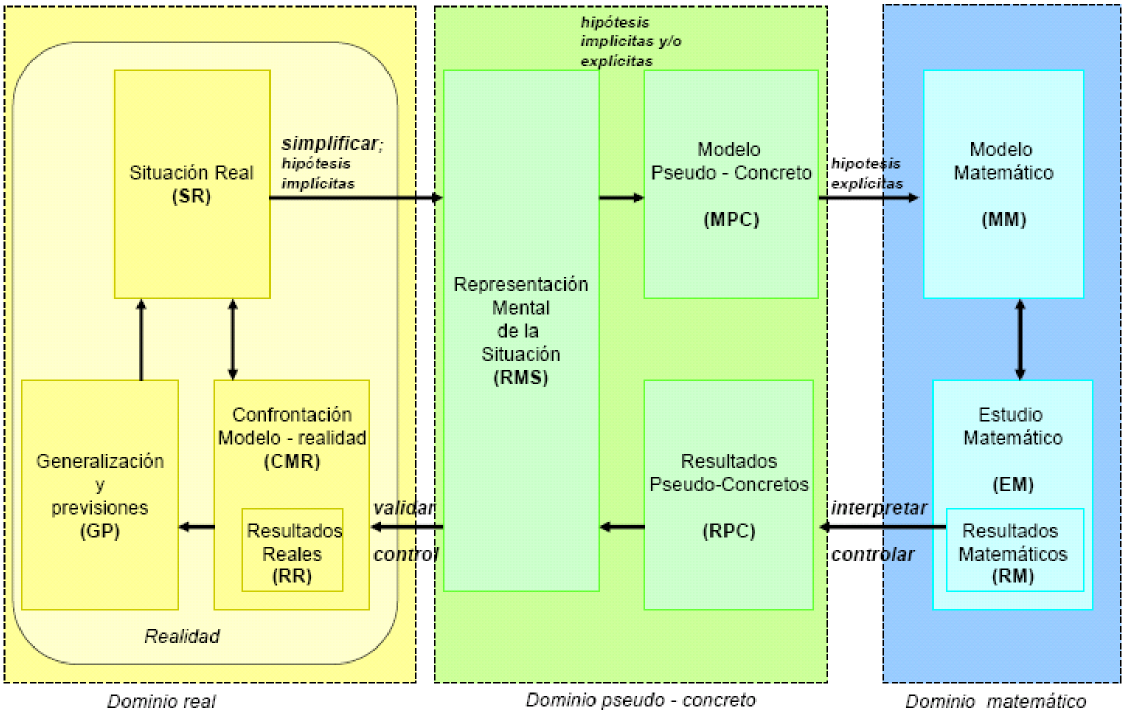


Figura 2: Proceso de modelación de referencia

Metodología

Nos interesa estudiar el proceso de modelación como objeto de enseñanza así como precisar la manera en la cual este proceso es llevado al sistema escolar, en particular en el último año de estudios en el liceo en Francia. Para ellos realizaremos observaciones en clase de física y matemáticas cuando la noción ecuación diferencial es introducida como una herramienta para modelar diversas situaciones extra-matemáticas.

En términos de Chevallard (1992), consideremos la institución del último año de preparatoria y suponemos que las sub-instituciones Clase de Física y Clase de Matemáticas son diferentes. En consecuencia, suponemos que el tipo de proceso de modelación puesto en práctica en cada una de estas clases también lo es. Resta a confirmar o refutar lo anterior gracias a observaciones y análisis realizados.

En un primer tiempo, un análisis de programas oficiales nos permitirá escoger el tema adecuado a estudiar con detalle en ambos cursos. En un segundo tiempo, un análisis praxeológico de manuales de clase nos permitirá caracterizar el tipo de tareas relativas a la práctica de la modelación que son enseñadas en cada una de las sub-instituciones, las etapas del proceso de modelación que son más y menos tratadas así como determinar el tipo de actividades propuestas a los alumnos y el tipo de técnicas enseñadas para llevarlas a cabo.

Elementos teóricos

La teoría de la transposición didáctica desarrollada por Chevallard (1992) evidencia la aparición sistemática de una distancia entre el saber sabio o experto (nuestro modelo de referencia), el saber a enseñar (lo establecido por los programas oficiales) y el saber enseñado (lo que es llevado realmente al aula de clase) a causa de diversas limitaciones del funcionamiento del sistema de

enseñanza. Nos interesa estudiar la transposición de nuestro proceso de modelación de referencia en el ámbito escolar.
En lo que respecta el análisis de manuales para conocer el tipo de actividades propuestas a los alumnos, la noción de praxeología es nuestra herramienta de análisis. Artaud (1997) establece que una praxeología es una respuesta a la pregunta de cómo realizar una determinada tarea aunque en general no es una tarea aislada, sino un tipo de tareas T. Para poder responder a una tarea t del tipo de tareas T habrá que emplear una técnica τ. La justificación de esta técnica es dada por la tecnología θ y esta a su vez puede ser justificada gracias a la teoría Θ. Se llega así a un modelo praxeológico de la forma $\left[\mathrm{T},\tau,\theta,\Theta\right]$.

Resultados

Análisis praxeológico de manuales de matemáticas

El programa oficial de la clase de Matemáticas establece que se mostrará a los alumnos uno o dos ejemplos de esta práctica con situaciones extra-matemáticas que conduzcan al establecimiento de una ecuación diferencial *simple* y donde los alumnos serán guiados en el trabajo de traducción matemática. Los autores del programa afirman la importancia de confrontar a los alumnos al menos una vez al proceso de modelación pero precisan que ninguna competencia será exigida en el examen del *baccalauréat*[46]. Identificamos el capítulo de “Ecuaciones Diferenciales” en la parte de Análisis como el lugar a estudiar con más detalle para ver el tipo de práctica de modelación para ser transmitida a los alumnos.
De acuerdo a los programas oficiales de la clase de matemáticas, dos casos posibles de tareas a efectuar son observados:

- una ecuación diferencial es propuesta por el enunciado del ejercicio restando al alumno de proponer la familia de las soluciones generales de la misma
- una ecuación diferencial es propuesta por el enunciado, una solución aproximada por el método de Euler es requerida.

La utilización de la palabra “traducción” en lugar de modelación por los programas oficiales implica que el pasaje entre una situación real (ilustrada por el enunciado) hacia el establecimiento de un modelo matemático (la ecuación diferencial) es una traducción literal de lo que se presenta en el enunciado sin confrontar al alumno a hacer elecciones o establecer hipótesis del fenómeno en cuestión.

Realizando un estudio en términos de praxeologías a los ejercicios no resueltos del capítulo “Ecuaciones Diferenciales” de tres manuales de la clase de Matemáticas (comúnmente usados en los liceos franceses), identificamos diversas situaciones extra-matemáticas modeladas por:

a) una ecuación diferencial de la forma $y'=ay+b$ con a y b constantes
b) una ecuación diferencial diferente pero que se puede transformar a una de la forma $y'=ay+b$ con a y b constantes. En este caso todas las indicaciones serán dadas al alumno (de acuerdo al programa oficial, confirmado con el análisis de los ejercicios de los manuales)

[46] Examen de fin de año que valida los tres años de liceo a nivel nacional, comúnmente llamado *BAC*.

El tipo de tareas más frecuentemente observadas en los ejercicios de los manuales son:
T$_{SG}$: establecimiento de la solución general de la ecuación diferencial de la forma *y'=ay + b* como la función y = $Ce^{ax} - b/a$.
T$_{SP}$: establecimiento de la solución particular de la ecuación diferencial *y'= ay + b*. Precisión de los parámetros de la función solución gracias a una condición inicial normalmente dada por el enunciado del ejercicio.

La técnica **τ_{SG}** presente en los manuales para *encontrar* la familia de la solución de una ecuación diferencial de la forma *y'=ay+b* es la utilización de un teorema establecido previamente por el profesor en clase y que afirma que las familia de soluciones son de la forma $Ce^{at} - b/a$; la consigna es "aprenderse este resultado de memoria" . Evidentemente, la justificación de esta técnica **θ_{SG}**, la demostración del teorema, es dada en clase pero éste no es un conocimiento exigido posteriormente al alumno.

Podemos concluir que el establecimiento del modelo ecuación diferencial por los alumnos (tipo de tareas **T$_{ME}$**) es poco observado, casi ausente. La transición de los resultados matemáticos (Estudio Matemático) en términos de la situación real (tipo de tareas **T$_{RP}$**) es tratada de manera simple con una simple reformulación de los términos matemáticos en términos de los objetos reales, sin representar dificultad aparente para los alumnos.

En términos de nuestro proceso de modelación de referencia podemos representar el tipo de modelación presente en la clase de matemáticas por la siguiente figura:

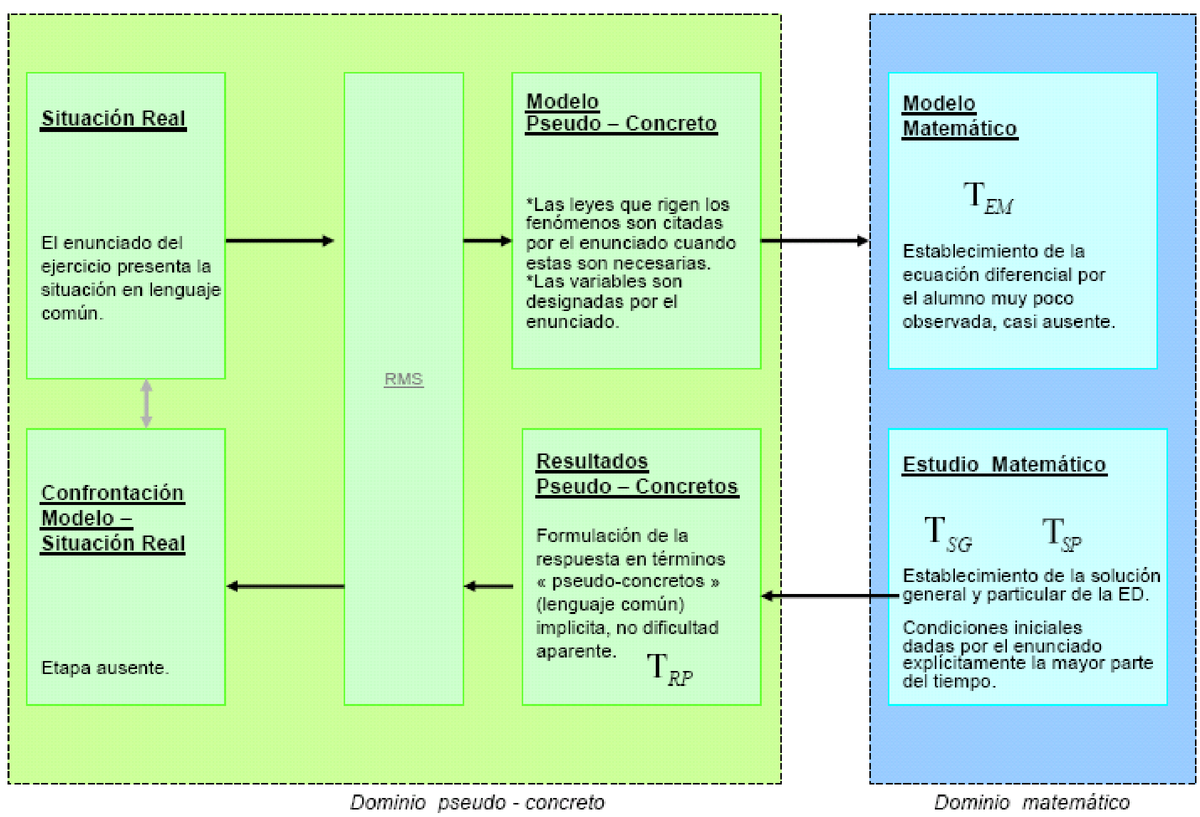


Figura 3: proceso de modelación existente en clase de matemáticas.

Análisis praxeológico de manuales de física

Aplicando la misma metodología para la clase de física, una primera revisión del programa oficial nos permite observar que el objeto ecuación diferencial (ED) es una herramienta de modelación en tres grandes dominios: la radioactividad, la mecánica y los circuitos eléctricos. Escogemos como tema de estudio la parte de Electricidad y analizamos los ejercicios no resueltos propuestos en el capítulo "Circuito RC"[47] (resistencia-condensador), de tres manuales de la clase de física usados en los liceos franceses, donde la carga y descarga de un condensador es estudiada.
Identificamos cuatro tipos principales de tareas a realizar por los alumnos relativas a la práctica de la modelación en esta clase:

$\mathbf{T_{EED}}$**:** Establecimiento de la ecuación diferencial para modelar la variación (en el circuito RC) de la tensión en bornas del condensador u_C en función del tiempo Se parte de una descripción verbal en términos de la física para llegar a una ED de la forma $u_C'+a\, u_C = b$ con a,b constantes.
$\mathbf{T_{VSG}}$: Verificación de que una función es solución general de la ED establecida. La técnica $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{VSG}}$ es la substitución (en la ED) de la solución general dada previamente en el enunciado.
$\mathbf{T_{SP}}$: Establecer una solución particular de la ecuación diferencial en términos de los parámetros del circuito, las condiciones iniciales a utilizar son normalmente a establecer por los alumnos.
$\mathbf{T_{RP'}}$: Responder a una pregunta realizada en términos físicos.

Con respecto a nuestra práctica de modelación de referencia, el tipo de modelación observada en clase de física puede ser representada por medio de la figura siguiente:

[47] La parte de Electricidad esta conformada por tres capítulos: "Circuito RC", "Circuito RL" y "circuitos RLC".

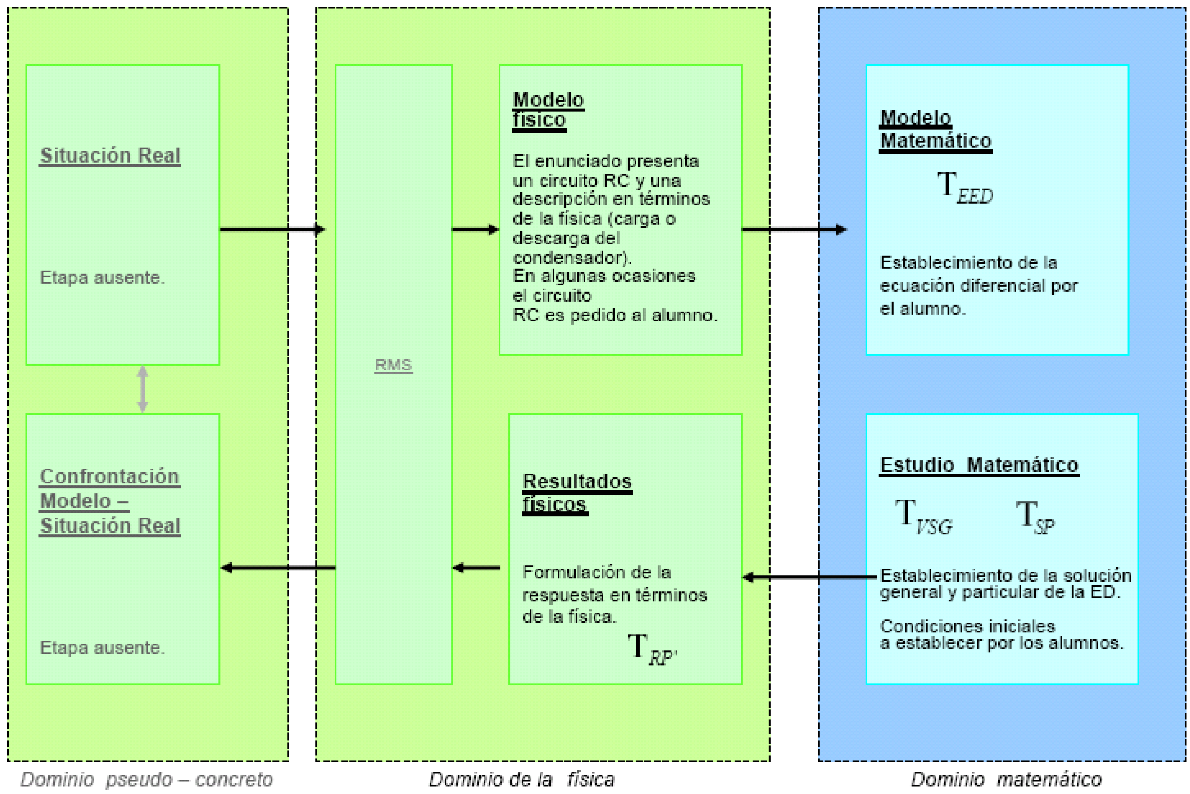


Figura 4: proceso de modelación existente en clase de física.

En este caso, señalemos que el establecimiento del modelo por los alumnos en clase de física es importante ya que el proceso de modelación es una práctica cotidiana de los físicos y este tipo de tareas es dejada a la responsabilidad del alumno. Por otro lado, se encuentra un tipo de tareas semejante a las observadas en clase de matemáticas para la determinación de una solución general $\mathbf{T_{VSG}}$ y particular $\mathbf{T_{SP}}$ pero en esta ocasión el tipo de técnica $\boldsymbol{\tau_{VSG}}$ que se exige del alumno es la comprobación mediante la substitución en la ecuación previamente establecida por los propios alumnos. La justificación de tal técnica pertenece más a un dominio matemático y en este caso tampoco observamos una justificación para ésta al interior de la clase de física (en términos de teoría propia a la física).

Discusión de resultados y conclusión

Sobre el proceso de modelación en general

El proceso de modelación puesto en práctica en clase de física y matemáticas difiere de nuestro esquema de referencia por lo que reconocemos la transposición de este proceso el ámbito escolar. La situación inicial de la gran mayoría de los ejercicios observados en los manuales de ambas clases está situada en un dominio pseudos-concreto o dominio de la física ya que ciertas elecciones son ya realizadas y sólo son mencionadas las variables que intervendrán en el modelo matemático final. Una consecuencia de este hecho es que las etapas de la Representación mental de la situación y de la confrontación Modelo-Situación Real se encuentran también al interior de este dominio).

La etapa de Generalización y Previsiones desaparece en situación escolar (con base a nuestras observaciones y análisis realizados) reafirmando lo observado en un estudio anterior en Rodríguez (2003). De acuerdo a Henry, esta etapa requiere de conocimientos especializados en el dominio extra-matemático que intervienen en la situación, lo que podría ser una razón de la dificultad que representaría si ésta estuviera totalmente a la carga de los alumnos a este nivel.

Podemos concluir que la práctica de modelación existente en el último año de preparatoria difiere de nuestra modelo de referencia el cual es próximo al proceso llevado a cabo por los expertos y reconocemos la existencia de un proceso de modelación "escolar" que reduce la dificultad de las actividades a realizar por los alumnos en diferentes etapas o pasajes entre estas.

La modelación en clase de matemáticas

El proceso de modelación existente en clase de Matemáticas es mostrado a los alumnos de manera parcial evitando confrontarlos a etapas claves de esta práctica. La gran parte del tiempo, los alumnos no establecen el modelo lo cual resta significado y riqueza a la práctica de la modelación a este nivel. El trabajo de los alumnos reside principalmente en trabajar en las etapas que pertenecen al dominio matemático aunque la etapa de "Estudio Matemático" del modelo propuesto exige al alumno de *tener en mente* la forma general de la solución y no representa mayor dificultad a los alumnos. La especificación de la solución particular a la situación, siendo las condiciones iniciales dadas en el enunciado, no propone tampoco mayor reto a los alumnos. En resumen, el proceso de modelación existente en esta clase es lejano a aquel vivido por los expertos y en términos de la enseñanza no permite al alumno el enfrentarse al acto de modelar de manera completa.

La modelación en clase de física

En clase de física, se observa una importancia mayor dada a este proceso de modelación. La etapa de Modelo Matemático es propuesta al alumno en clase y una interacción entre ambas disciplinas (Matemáticas y Física) es fundamental para poder interpretar en términos de los componentes del circuito – resistencia *R*, capacidad *C* – los resultados obtenidos matemáticamente. Observamos que en esta disciplina, el proceso de modelación vive de manera más cercana a nuestro esquema de referencia y algunas etapas son más tratadas; en particular, el establecimiento del modelo y de las condiciones iniciales para encontrar una solución particular lo cual permite al alumno un mayor aprendizaje respecto a la modelación en Física. Observamos la aparición del dominio de la Física en nuestro esquema de modelación ya que antes de entrar de lleno a trabajar en un dominio puramente matemático, el pasar por un modelo físico (en nuestro caso una configuración del circuito RC así como las leyes que rigen éste como ley de tensiones, ley de Ohm, etc) es imprescindible.

El tipo de tareas $\mathbf{T_{SG}}$ y $\mathbf{T_{VSG}}$ para la determinación de una solución general para la ecuación diferencial $y'=a\,y + b$ en ambas sub-instituciones clase de matemáticas y físicas da lugar a la existencia de dos técnicas distintas ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{SG}} \neq \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{VSG}}$), correctas o no, dependiendo de la clase donde la tarea es formulada (efectos del contrato didáctico).

El diseño de situaciones que permitan el trabajo del alumno en más etapas del proceso de modelación es una tarea que se revela primordial para mostrar los alcances y también las limitaciones de este tipo de práctica a alumnos que culminan sus estudios secundarios y para los cuales las Matemáticas serán, seguramente, una ciencia de servicio en su futuro profesional.

Agradecimientos
Deseo agradecer de manera especial a Colette Laborde quien ha dirigido y supervisado el desarrollo del presente estudio en el marco de mis estudios doctorales. Agradecemos el apoyo financiero brindado por el equipo de Informática y Aprendizaje de las Matemáticas para la asistencia a la X Escuela de Invierno de Matemática Educativa así como el apoyo recibido del CONACYT para la realización de mis estudios doctorales.

Referencias bibliográficas

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la IX Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Houlgate : ARDM et IUFM Caen, Francia.

Blum, W. (2002). ICMI 14: Applications and modelling in mathematics education – Discusión Document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1-2), 149-171.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37–68.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (2), 86-95.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-111. La pensée Sauvage. Francia.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En M. Henry (Ed), *Autour de la modélisation en probabilités*.. (pp.149-159). Besançon, Francia : Commission Inter-IREM Statistiques et Probabilités PUFC.

Rodríguez , R. (2003). *Le contrat didactique relatif aux équations différentielles comme outils de modélisation en classe de Terminale S*. Tesis de maestría no publicada. Université Joseph Fourier, Francia.

EL IMPACTO QUE HA TENIDO EN LOS DOCENTES DE PRIMARIA LA PROPUESTA DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE PROBLEMAS: ESTADO DEL ARTE

Leticia Téllez Hernández, Gustavo Martínez Sierra
Universidad Pedagógica Nacional; CIMATE- Universidad Autónoma de Guerrero. México.
tellez_ 56@hotmail.com, gmartinezsierra@gmail.com

Reporte de investigación

Resumen

Este trabajo es producto del proyecto de investigación “El impacto que ha tenido en los docentes de primaria la propuesta de enseñar matemáticas a través de problemas” que se realizará en el Estado de Guerrero, con docentes y alumnos de educación primaria, cuyos objetivos son: Evaluar el impacto que ha tenido esta propuesta en los docentes, y analizar que factores socioculturales de los docentes han influido en el rol asumido. Con el propósito de asegurar la originalidad de este trabajo, se han consultado reportes de investigaciones que tratan el tema y se ha conformado un estado del arte en donde se destaca que se investigó, cómo se hizo y qué se obtuvo.

Palabras claves: Enseñanza problémica, matemáticas, escuela primaria.

Introducción

Hemos escuchado en los medios de comunicación y leído en reportes estadísticos en relación al fracaso educativo en México y el atraso educativo en el que se encuentra el estado de Guerrero, nadie va ha venir a resolver nuestros problemas, es necesario que como docentes mexicanos y guerrerenses realicemos investigaciones para conocer las causas de estos fracasos y con base en ello hacer propuestas para mejorar nuestra educación.

Debemos de reconocer que en México y específicamente en el Estado de Guerrero, reformas van y reformas vienen y nunca se evaluado su efectividad, ni los factores que en ellas han influido, en esta ocasión es importante hacer un alto y escuchar la voz de los docentes para conocer : EL IMPACTO QUE HA TENIDO EN LOS DOCENTES DE PRIMARIA LA PROPUESTA DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE PROBLEMAS.

A 13 años de iniciada la reforma de enseñar matemática a través de la resolución de problemas en las escuelas primarias de México, se han realizado investigaciones en relación al aprendizaje de los alumnos y sobre los procedimientos del saber enseñado; un vértice importante en el triangulo didáctico de esta reforma, son los docente en servicio ya que son ellos también los que viven la realidad del proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Por lo que hemos decidido realizar una investigación en la cual la metodología empleada será de tipo etnográfico, porque creemos que ella nos permitirá describir e interpretar, por medio de observaciones y entrevistas la realidad que viven los docentes en sus aulas.

El estado del arte que se presenta en este documento es uno de los avances que tenemos de nuestra investigación el cual se realizó con el siguiente objetivo:

- Conocer que se ha investigado del tema, para asegurar la originalidad de la investigación.

Metodología

La metodología empleada para la elaboración del estado del arte ha sido bibliográfica, se revisaron en bibliotecas del la UPN, el CINVESTAV y otras instituciones formadoras de docentes reportes de investigaciones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en educación primaria.

Cabe mencionar que la investigación de Lezama (2003) no es de educación básica, pero resulta pertinente para nuestra investigación la noción la reproduciblidad de situaciones y el papel que desempeñan los maestros. Éste trabajo nos ha permitido reconocer la necesidad que existe de investigar a los docentes cuando enseñan matemáticas, ya que él es un punto importante en el sistema didáctico, no únicamente de educación básica sino de todos los niveles.

Estado del Arte (Resultados)

Con el propósito de asegurar la originalidad de esta investigación (exigencia en un doctorado), se han consultado reportes de investigaciones para saber que se ha hablado del tema y que hace falta por investigar. De esta indagación se presenta a continuación los resultados obtenidos, los que se enmarcan en cuatro aspectos: título, ¿qué se busca?, ¿como se busca? y ¿qué se obtuvo? en cada una de las investigaciones.

A. **La enseñanza oficial de las matemáticas elementales en México; su psicopedagogía y su transformación. (1944-1986)**

¿Qué busca?
La orientación que han mantenido esas propuestas, que necesidades han resuelto, que sustento matemático y pedagógico han tenido.

¿Cómo lo busca?
La metodología empleada fue bibliográfica, se revisaron: Memorias de la Secretaría de Educación Pública, acuerdos reglamentos, discursos, planes de estudio y programas oficiales, libros de texto gratuitos, libros y guías didácticas para el maestro

¿Qué encuentra?
Como ha ido evolucionado la enseñanza de las matemáticas a través de las reformas educativas que han sido implantadas en México a partir de 1944 a 1986.

CUADRO COMPARATIVO DE LOS PLANES DE ESTUDIO DE MATEMATICAS 1994-1980

	1944	1960	1972	
OBJETIVOS GENERALES PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA	1. Llenar las necesidades de cálculo de la vida práctica. 2. Capacitar al educando para que posea una apreciación satisfactoria de los aspectos cuantitativos del ambiente natural y social. 3.Favorecer el desarrollo de las funciones psíquicas, por medio de los conocimientos matemáticos	1.Desarrollar el pensamiento cuantitativo y la actitud de rela cionar. 2. Precisar el lenguaje. 3. Fomentar el espíritu de análisis. 4. Afirmar la disciplina mental.	1. Fomentar en el educando la capacidad de formalizar con precisión y la capacidad de aplicar su razonamiento a situaciones reales o hipotéticas de las cuales pueden derivarse a su vez conclusiones prácticas y otras formalizaciones. Desarrollar el pensamiento cuantitativo y relacional, como un instrumento de comprensión, interpretación de los fenómenos sociales, científicos.	1. Desarrollar el pensamiento lógico, cuantitativo y relacional. 2. Manejar con destreza las naciones de número, forma tamaño y azar. Utilizar la matemáticas como un lenguaje en situaciones de la vida cotidiana.
CONTENIDOS RELEVANTES	Hábitos fundamentales de la suma, resta, multiplicación y división. Comprobación de las operaciones. Los números romanos, Números denominados. El interés simple. Sistema monetario mexicano Decalitro, decilitro, y centilitro. Medidas inglesas. Líneas mixtas, ondulada, espiral Poliedros Las tres posiciones de la línea recta.	Números romanos. Números ordinales. Razones y Proporciones. Divisibilidad. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Comprobación de operaciones. Sistema monetario mexicano. Medidas inglesas. Operaciones con números denominados. Construcción de cuerpos geométricos. Clasificación de líneas, de ángulos(estos contenidos son quitados en 1972)	Los números enteros. Las propiedades de las operaciones. Nociones sobre conjuntos Lógica, simetría El plano cartesiano Escalas Probabilidad Estadística Variación funcional (Estos contenidos aparecen por primera vez en el currículo de educación primaria)	Diferentes representaciones de un mismo número Expresión de situación mediante ecuaciones. (Estos contenidos reciben especial énfasis, aunque de alguna manera aparecen en el 72)
CONCEPCIÓN DE LA MATEMÁTICAS	Conjunto de habilidades y destrezas que es necesario dominar en virtud de su utilidad en la vida práctica. Instrumento que desarrolla ciertas facultades y cualidades memoria y orden	Herramienta de aplicación en la resolución de problemas Instrumento para desarrollar ciertos hábitos y facultades mentales	Cuerpo estructurado de conocimientos y conceptos que el niño debe conocer. Instrumento que favorece la capacidad de formalización y, en segundo término la capacidad de interaccionar con el medio	Conjunto de conocimientos y procedimientos inducidos con los que al interactuar, el niño desarrolla la capacidad de abstracción, generalización y resolución de problemas entre otros.
ASPECTO RELEVANTES EN LA CONCEPCIÓN DE APRENDIZAJE	Aprendizaje pasivo, basado fundamentalmente en la recepción de estímulos verbales generados por el discurso del profesor. en geometría los estímulos también son visuales. Fuerte acento en la mecanización y la memorización	Comprensión, adquisición de conocimientos ya elaborados, con base a explicaciones apoyados en la observación de objetos, esquemas o figuras. Fuerte énfasis en la mecanización etapa en la que el niño se vuelve activo. Sólo en el primer grado y algunas veces en el segundo, se propone aprendizaje con base en la manipulación de objetos.	Aprendizaje constructivo, basado en la reflexión sobre esquemas presentados en los textos, o sobre acciones de doblado, conteo, superposición Las acciones y las reflexiones se dirigen, paso a paso mediante preguntas. Hay primacía en la lógica matemática sobre lógica infantil	Aprendizaje constructivo. El niño construye los conceptos con base en la acción sobre los objetos, el maestro dirige paso a paso las actividades del niño para llevarlo a donde se supone de antemano debe llegar. Las acciones sobre los objetos es el funcionamiento del aprendizaje. Hay primacía en la lógica infantil sobre la lógica matemática
INFLUENCIAS PEDAGOGICAS	Los métodos tradicionales. La didáctica de Juan Amós Comenio	Aún los métodos tradicionales, especialmente de tercero a sexto grado. Los empiristas(Hume, LOcke)	Los métodos por descubrimiento la mayéutica. La matemática moderna. Aún hay resabios de la escuela tradicional en el tratamiento de	Decroly, en general la escuela activa. Polya, en lo que se refiere a la resolución de problemas.

			las fracciones	Piaget, en lo que se refiere ala acción física sobre los objetos.
ELABORA DORES DEL CURRICULU M	Dirección General de Educación primaria/Consejo nacional técnico de la educación/Instituto Nacional de Pedagogía	Consejo nacional técnico de la educación. **Por primera vez de manera trascendental se cuenta con el apoyo del libro de texto**	**Profesores- investigadores del Instituto Politécnico Nacional, auxiliados por profesores y pedagogos**	Matemáticos, pedagogos, Psicólogos y profesores, desde la Dirección General de contenidos y Métodos Educativos de la SEP
	1944	1960	1972	1980

B .**Currículo de matemáticas de la reforma de educación básica en México durante 1992-2000." (Rodrigo Cambray Núñez en el año 2003)**

¿Qué busca?

1. que fuerzas importantes manejaron el currículo de la reforma de matemáticas en México en los 90s.
2. ¿Qué incidentes específicos sirvieron para iniciar o simular el proceso de la reforma?
3. ¿que acciones tomaron los lideres cuando vieron la necesidad de cambio, y cuales fueron sus razonamientos?

¿Cómo lo busca?

Emplea la Investigación histórica la cual consiste es una colección y evaluación de datos, eventos que ocurrieron en el pasado.

¿Qué encuentra?

Hubo varios factores sociales, culturales, económicos, políticos que influyeron en el surgimiento de esta reforma.
En los 90s la enseñanza de las matemáticas en México toma un carácter científico.
Surge en nuestro país una comunidad de investigadores de matemática educativa. Algunos de ellos participaron en la estructuración del currículo de matemáticas en educación primaria, por eso q se dice que en los 90 la reforma tuvo bases de investigadores profesionales en relación a la matemática.

Algunas de las recomendaciones del autor son:

- **L**a reforma de los 70s nunca fue evaluada, por lo cual es necesario hacer un sistema de evaluación del desarrollo de la reforma realizada en los 90s.
- Es necesario que se hable de profesionalización y no solo de ocupación.
- El fenómeno de la profesionalización en México es ancho y puede ser estudiado en México por diferentes perspectivas, como una nueva disciplina o como la agregación de una nueva comunidad.
- Es necesario investigar las características de la interrelación de grupos de investigadores matemáticos de diferentes instituciones en México (DME, DIE, UPN, y ENS y otros) y hacer un juicio de su presencia.

- Un importante fase de la investigación educativa en México fue el papel que jugaron algunos profesionales que se comprometieron individualmente o en equipo en investigación a partir de 1970 y que han integrado una comunidad que apoyo al desarrollo de la reforma de los 90s. entre los que se encuentran: DME, CINVESTAV, DIE, UPN y otras universidades del país (UAEM, UAdeC, UAS). El estudiar la conducta de estos individuos permitiría encontrar un posible paradigma, como aconseja Kuhn, localizar grupos posibles en áreas de investigación sin anteriores paradigmas.

C. **Adaptar para utilizar. Formas de apropiación de innovación curricular en matemáticas con maestros de primaria". (D. Block y Antonio Moscoso. 2005)**

¿Qué busca?

Conocer formas y grados en que un curso de actualización que se impartió a nivel nacional, ayudó a los maestros a apropiarse de la propuesta curricular para la enseñanza de las matemáticas de la reforma de 1993.

¿Cómo lo busca?

Se realizó en dos fases, La primera fueron entrevistas a los 21 maestros sobre su experiencia docente y del curso que se les impartió. Segunda se observaron a 5 maestros de los 21 que asistieron al curso, durante 19 clases. (Etnografía)

¿Qué encuentra?

Pocos maestros rechazan la propuesta, algunos la combinan con algunas otras metodologías el ejemplo de una maestra que ocupa cosas tradicionales pero incorpora otras de la propuesta.
Esta forma de apropiación de la propuesta curricular, seleccionando algunas actividades y transformándolas al integrarlas en secuencias didácticas divergentes es usada por maestros que conocen poco, o se identifican poco con el enfoque de la propuesta.
En dos de los 5 estudios de caos, se identificó un nivel significativo de apropiación de la propuesta. Se observó seguridad en sus decisiones, imprimieron modificaciones.

Comentarios finales del autor:
Los maestros hacen adaptaciones como una forma de suplir las carencias inherentes a las mismas.
Las propuestas didácticas pueden constituir un apoyo importante en los procesos de apropiación de enfoques innovadores
El dominio del contenido disciplinario no constituye una condición suficiente en dichos procesos pero, al parecer, sí necesaria.

En dos de los 5 estudios de casos, se identificó un nivel significativo de apropiación de la propuesta. Se observó seguridad en sus decisiones, imprimieron modificaciones.

D. La reforma realizada. La resolución de problemas como vías del aprendizaje en nuestras escuelas.(Avila Storer. 2000)

¿Qué busca?

Analizar desde distintas perspectivas, las repercusiones que en la clase de matemáticas ha tenido la reforma de 1993 así como las formas que ésta ha tomado en las escuelas.

¿Cómo lo busca?
Con el método etnográfico. La muestra estuvo formada por 18 escuelas, del medio urbano y rural, se analizaron 70 registros de observación, que corresponden a más de 100 horas de clase de segundo cuarto y sexto grado, se entrevistaron a los 18 maestros ya 58 niños, también se aplicaron exámenes a los 500 niños participantes.

¿Qué encuentra?

- No se puede ser pesimista porque se puede ver avances en los maestros, construyeron nuevas convicciones, creencias y saberes, nuevas formas de actuar en clase. Lo que se debe atender según los autores es:

a. La noción de actividad y de problema, cuyo significad es importante terminar de configurar.
b. La realización de trabajo en equipo, que esta como uno de los puntos vulnerables del proceso educativo.
c. La actividad en la red primaria, con fines de formalización e institucionalización, que hasta hoy casi no se realiza.
d. El tratamiento de los problemas y las preguntas abiertas, así como el de los errores y la validación.
e. Las interacciones didácticas que se promueven alrededor de los libros de texto y la simplificación que sobre estos realizan los profesores.

- No se puede decir que con la distribución de libros y los cursos de actualización que se leas han dado a los maestros ya todo está resuelto, "el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas ha de permanecer como problema en la agenda de quienes delinean las políticas educativas estatales".
- Existen concepciones que los maestros han adoptado como los problemas para razonar y en lugar de la actividad modelo, lo han convertido en procedimiento modelo. "parece que los profesores no son consientes de las modificaciones que han operado sobre las ideas difundidas.
- "Sabemos que las acciones tienen que ver con las creencias y convicciones y no solo con destrezas didácticas. Modificar las concepciones y el núcleo de las creencias resulta mucho más complejo que desarrollar las habilidades didácticas.

- Cualquiera que se la decisión que los planeadores tomen al respecto, una y otra vez la nuevas creencias y destrezas construidas por los profesores a partir de su pasado pedagógico y los elementos novedosos que se les ofrezcan definirán las realizaciones de la reforma. Este hecho, hasta hoy no se ha considerado lo suficiente.

E. **Un estudio de reproduciblidad de situaciones didácticas. (Lezama Andalón Francisco Javier. 2003)**

¿Qué busca?

Que los estudiantes construyeran la noción de función exponencial.

¿Cómo lo busca?

Con el diseño de la ingeniería didáctica "Un estudio didáctico de la función 2x ".

¿Qué encuentra?

El fenómeno de la reproducibilidad, como uno de aquellos fenómenos que nos permite analizar la repetición del efecto didáctico se presenta como frágil ya que la repetición del efecto didáctico está determinado por múltiples factores, siendo los más complejos e incontrolables, los humanos.

El fenómeno de reproducibilidad consiste en el estudio de la intervención en sistemas didácticos, ya que en la tríada didáctica, el polo del saber es el que permanece estable (en términos generales), siendo el de los estudiantes y profesores los más difíciles de controlar.

El profesor juega un papel determinante en el proceso de reproducción de situaciones didácticas, ya que es el polo del sistema didáctico que requiere ser más activo y flexible, pues vive la situación didáctica,

Con relación a las actividades que desarrolla el profesor, reviste primordial importancia las interacciones entre profesores y alumnos, ya que a través de dichas interacciones se puede observar en toda su realidad el sistema didáctico así como los roles que asumen los profesores y estudiantes.

Este trabajo sólo ha centrado la atención a la reproducción de una Ingeniería Didáctica, resulta imposible hacer extrapolaciones a la reproducción de efectos didácticos de distintas propuestas u objetos didácticos. Si bien el diseño de propuestas didácticas requiere de una amplia perdurabilidad en la escuela, nuestra investigación ha mostrado para un caso específico, que todo producto didáctico se ve amenazado por un número grande de interpretaciones, modificaciones, reducciones, etc., de las cuales es casi imposible sustraerse.

Conclusiones

Del análisis de los trabajos anteriormente presentados obtenemos las siguientes conclusiones:

Las reformas educativas de educación primaria no han sido evaluadas, se han llevado a cabo cada una de ellas por cuestiones políticas de cada sexenio presidencial. En la reforma de 1993 en relación a la enseñanza de las matemáticas, se perciben fundamentos científicos por que en México se han ido constituyendo comunidades de matemáticos educativos.

La propuesta de esta reforma los maestros la han ido adaptando según sus creencias y convicciones construidas a partir de su pasado pedagógico. Es verdad que modificar las concepciones y el núcleo de las creencias de los docentes resulta mucho más complejo que desarrollar las habilidades didácticas.

Por todo esto se considera importante continuar con este proyecto de investigación, pues nos permitirá de manera general una evaluación en nuestro estado del impacto que ha tenido esta reforma, de manera concreta conoceremos las opiniones de los docentes en relación a la enseñanza de las matemáticas a través de problemas.

Referencias Bibliográficas

Ávila A.(1988). La enseñanza oficial de las matemáticas elementales en México. Su psicopedagogía y su transformación. (1944-1986). México. D.F. UPN

Ávila, A. (2004). "La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras aulas". 1ª.Edición. México, D.F. SEP

Aebli, H. (1987). Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. 1ª. Edición, Buenos Aires: Kapeluz,

Aebli, H. (1988). 12 formas de enseñar. 1ª. Edición, Madrid, España: Nancea

Bertely, B. M. (2000). Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar. México: Paidós

Block, D. & Moscoso. (2005). Adaptar para utilizar. Formas de apropiación de innovación curricular en matemáticas con maestros de primaria, Ponencia congreso de investigación Educativa. México.

Brousseau, G. (1992). Fundamentos de didáctica de la matemática. Universidad de Burdeos. 1ª. edición. México, (Derechos reservados, SEP) .

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques 7*(2): 33 – 115.

Cambray,R. (2003). Reform proces of the mathematic curriculum for basic education in México during 1992-2000. University Muncie, Indiana. USA.

Corestein , Z. (1998). El significado de la investigación etnográfica en educación, en: Factores que intervienen en la calidad del proceso educativo en la escuela primaria. México. UPN.

Cantoral. & Farfán. (2003). La matemática escolar: orígenes y dificultades. En: *Desarrollo Conceptual del Cálcul*o. México: Thomson Learning.

Cantoral. & Farfán. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematic*s *53*(3): 255 – 270.

Cantoral. & Farfán. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: La revista Epsilon , Núm.42.pp. 353- 369

Díaz , M. G. (2001) Técnicas y tradiciones. Etnografía en a escuela rural mexicana. México: Plaza y Valdez edititores.

D´Amore B (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. México: Reverte.

Eco, U. (2005). Cómo se hace una tesis. España: gedisa

Farfán, R. – M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Gentili, P. (2002). Políticas públicas, educación y ciudadanía. En: Educación, globalización y democracia. Seminario Internacional. 323pp

Goetz J:P. y M.D. LeCompte. (1988). Etnografía y diseña cualitativo en investigación educativa. Edit. Morata.España

Hammersley Martín y Atkinson Paul (1994) .Etnografía, Métodos de investigación. Barcelona España: Paidós.

Lezama, F. J. (2003.) Un estudio de reproduciblididad de situaciones didácticas. Tesis, Cinvestav. México.

Téllez, L. (1997). La enseñanza de la división a través de la resolución de problemas. Tesis México D.F.

EN BUSCA DE LA DEPENDENCIA E INDEPENDECIA LINEAL

Carlos Oropeza L., Javier Lezama A.
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.
carlos_oropezamx@yahoo.es; jlezamaipn@gmail.com
Laboratorio Didáctico.

Resumen

En este trabajo reportamos algunas experiencias de clase con estudiantes de un curso de Álgebra Lineal, en las que se les hace trabajar actividades que los obligan a elaborar representaciones de carácter geométrico a los conceptos de dependencia e independencia lineal. Dichas experiencias tienen carácter exploratorio y se orientan a detectar elementos distintos en el proceder de los estudiantes de cuando se hace un tratamiento convencional en el estudio de dichos conceptos. Estas experiencias con centración en representaciones geométricas, nos aportarán elementos para problematizar la adquisición del concepto de dependencia e independencia lineal. Las investigaciones didácticas reconocen en tales conceptos una especial complejidad, debido a su carácter abstracto. Esperamos, a partir de la actividad desarrollada en este laboratorio detectar elementos de carácter cognitivo y didáctico en el proceso de comprensión de dichos conceptos, que nos permitan estructurar preguntas precisas sobre la adquisición de conceptos del Álgebra Lineal en el aula, vía representaciones visuales o de contextualización.

Palabras clave: Dependencia lineal, independencia lineal, Wronskiano.

Introducción

La investigación en Matemática Educativa, se ha ocupado cada vez más, al estudio de los procesos de aprendizaje de las matemáticas y los procesos de instrucción asociados a dicho aprendizaje en el nivel universitario.

El aprendizaje del álgebra lineal en los estudiantes de ingeniería, presenta dificultades que al parecer son diferentes a las que se producen en otras áreas de la matemática, como por ejemplo, el cálculo. En la instrucción del álgebra lineal, no es usual partir de conocimientos físicos o geométricos para comenzar la construcción de sus conceptos. La mayor parte de los conceptos algebraicos, son presentados a partir de definiciones formales que no son usuales en las otras áreas de la matemática escolar, tal es el caso de una presentación axiomática que define las características del objeto matemático a estudiar; la existencia de tales objetos definidos, en la mayoría de los casos no parte de conocimientos previos, ni de argumentos provenientes de la física o la geometría, sino que se construyen formalmente. Esto hace que muchos estudiantes perciban al álgebra como demasiado abstracta y sus objetos carentes de significado y en extremo alejados de aplicación en la realidad. Esta necesidad de profunda abstracción ha promovido diversas reflexiones en torno a la búsqueda de presentaciones diferentes del tema. Con el fin de intentar clarificar la comprensión y construcción de los conceptos matemáticos de dependencia e independencia lineal en las funciones polinómicas que se abordan en la asignatura de álgebra lineal, en la presente propuesta se pretende hacer uso de las representaciones geométricas para que los alumnos puedan incorporarlas en la búsqueda de significados en el concepto antes referido.

Algunos los problemas relativos al aprendizaje del álgebra lineal se refieren a las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante que se trata del mismo objeto. El alumno se encuentra, por ejemplo, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales (Sierpinska, 1996). Cabe preguntarse, entonces, cómo se realiza el pasaje de una forma de representación a otra y de qué manera contribuyen estas representaciones diversas en la construcción de un concepto algebraico. Comprendemos que una representación única, no es capaz de transmitir la totalidad de su significado, por lo que se hace necesario un acercamiento a través de diversas representaciones al concepto para llegar a su comprensión y construcción.

La visualización juega un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos. Existen diversas definiciones y caracterizaciones de la visualización. "*La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento"* (Arcavi, 1999, p.56). Por otra parte, la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como "*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende*". (Cantoral & Montiel, 2002, p.24). En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura.

En las actividades que se proponen en este trabajo, se apunta, por una parte a reconocer cómo el abordaje de conceptos de álgebra lineal haciendo uso de distintas representaciones, favorece la construcción de las mismas. Por otra parte, se intenta determinar si por medio de la visualización de funciones, es posible identificar la presencia de dependencia o independencia lineal de las mismas, al menos en casos particulares. De esta manera, mediante la realización de las actividades se deberá poner de manifiesto el doble papel que juegan los objetos matemáticos y la operatividad de los elementos visuales en el contexto del concepto mismo. En este marco, irán surgiendo, por lo tanto preguntas que guiarán la investigación que estamos realizando, en referencia a cómo diseñar un acercamiento al álgebra lineal, en este caso particular a los conceptos de dependencia e independencia lineal que involucren diversas representaciones y de qué manera éstas pueden favorecer la construcción de dichos conceptos.

Una secuencia de actividades para introducir la dependencia e independencia lineal

Se presenta a continuación una secuencia de actividades diseñada con la finalidad de trabajar los conceptos de dependencia e independencia lineal de funciones y polinomios de primero y segundo grado, haciendo uso de recursos y representaciones geométricas. Se parte en ellas de la consideración de la importancia de la visualización o representación geométrica para la comprensión de objetos matemáticos en la asignatura de Álgebra Lineal, y de que los recursos geométricos deben poseer un papel central en el aula, no siendo relegados únicamente a la ejemplificación. La exploración gráfica debe complementar al estudio teórico de un tema, permitiendo mejorar la construcción de los conceptos matemáticos.

Los recursos tecnológicos contribuyen en gran medida a la exploración gráfica, permitiendo aprovechar sus ventajas tanto en aspectos gráficos como de velocidad de cálculo. La tecnología brinda facilidades para la visualización. Sin embargo, es fundamental tener en cuenta que lo importante en el aula es el diseño de las propuestas didácticas y no los recursos que se utilizan para su puesta en práctica. En las actividades que propusimos en esta investigación, los estudiantes pudieron hacer uso de los recursos tecnológicos disponibles, lo que les facilitó la experimentación y visualización, sobre todo en cuanto a las facilidades de graficación y tiempo de realización de cálculos.

La investigación posee características de tipo cualitativo, radicando nuestro interés en la exploración de conceptos. El análisis de datos es de tipo inductivo, ya que las categorías e interpretaciones se construirán a partir de la información que se obtenga. El foco de investigación tendrá, como acabamos de afirmar, un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo.

En esta sección se analizan algunas de las respuestas emitidas por un grupo de estudiantes de segundo semestre de ingeniería en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (UNAM), México.

En el trabajo se ha puesto una atención especial en los significados que los estudiantes e ingeniería asignan al concepto de dependencia e independencia lineal con relación a los vectores libres (flecha) y funciones de primero y segundo orden haciendo uso del Wronskiano para su análisis. Las experiencias convencionales nos muestran que frecuentemente los profesores de la asignatura de álgebra Lineal dan la definición, inician con ejercicios simples, aumentan el grado de dificultad y solicitan al estudiante continúe con la solución de los ejercicios.

Haciendo uso de esta consideración, la propuesta que se plantea en las actividades diseñadas tiene como propósito construir una serie de hipótesis que reflejen cómo enfrentan a su solución los estudiantes, qué respuestas dan, la actividad matemática que se provoca las argumentaciones que se generan y los conceptos matemáticos que logran poner en juego. Proponemos de manera implícita reflexionar sobre las posibles ventajas que dichas actividades pueden producir con miras al aprendizaje del concepto en contraste con la forma convencional con que se revisan dichos conceptos.

ACTIVIDAD 1. *Construcción en el plano y del plano*

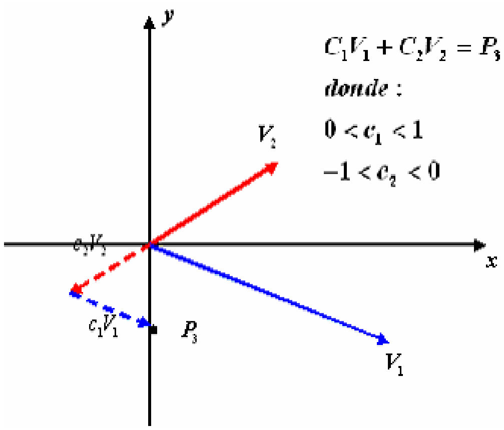
En esta actividad se pretende que los alumnos incorporen antecedentes que les ayuden a la adquisición del concepto de combinación lineal como antecedente del concepto de dependencia e independencia lineal. También se pretende que a partir de la solución de ésta, los estudiantes deduzcan el concepto de combinación lineal, logren una interpretación adecuada de los vectores libres que se asocian a cada uno de los puntos marcados en los diferentes cuadrantes, recuperen el significado del producto de un escalar por un vector, practiquen la suma de vectores preferentemente a partir del método del paralelogramo y hagan uso de los elementos geométricos como una alternativa para verificar y construir sus respuestas.

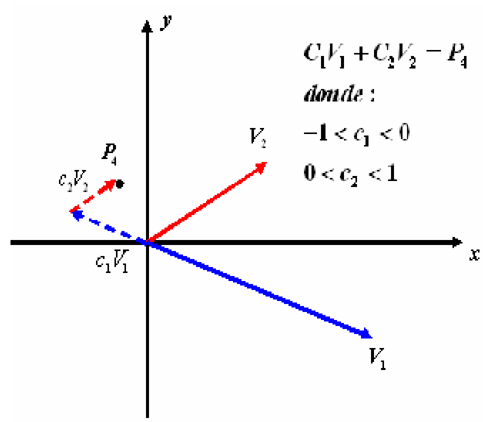
Como se puede apreciar en el resultado de la actividad que se reporta, presenta en forma general que los estudiantes logran responder en menor o mayor medida los cuestionamientos asociados a la misma. En la discusión final se observó que al finalizar la misma la totalidad de los integrantes en los cinco equipos coinciden en una respuesta común siendo para ellos este hecho un agente motivador que les permite aceptar naturalmente la solución de las actividades restantes.

Es importante observar los métodos y las herramientas utilizadas por los alumnos en la resolución de las actividades, esto deja de cierta manera claro la idea que tienen del concepto de estudio.

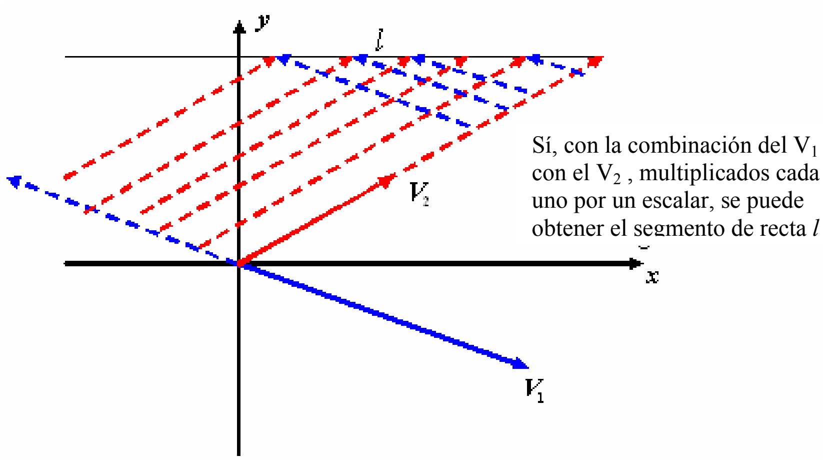
Algunas respuestas a la actividad

1. Con los vectores V_1 y V_2 construye los vectores P_1, P_2, P_3 y P_4 de la siguiente figura





2. ¿Con los vectores V_1 y V_2 puedes formar el segmento de recta l?



3. ¿Con los vectores V_1 y V_2 puedes formar la totalidad del plano?
Sí, ya que cualquier combinación lineal de los vectores V_1 *y* V_2*, multiplicados cada uno por cualquier escalar que pertenezca a los números reales, dará un punto en el plano* R^2.

4. ¿Son los vectores V_1 y V_2 los únicos que pueden formar el plano R^2?, proponer otro ejemplo distinto.
No, existen infinidad de vectores que pueden formar el plano R^2*, siempre y cuando los dos sean diferentes de cero.*

5. Escribe la ecuación que caracteriza la resultante de los vectores V_1 y V_2

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 = r$$

Como se puede apreciar en el resultado de la actividad que se reporta, presenta en forma general que los estudiantes logran responder los cuestionamientos asociados a la misma. En la discusión final se observó que la totalidad de los integrantes en los equipos coinciden en una respuesta común, siendo para ellos este hecho un agente motivador que les permite aceptar naturalmente la solución de las actividades restantes.

Es importante observar los métodos y las herramientas utilizadas por los alumnos en la resolución de las actividades, esto deja de cierta manera claro la idea que tienen del concepto estudiado.

En estas actividades, se está poniendo en juego el concepto de base de un espacio vectorial, aparte de la de combinación lineal y generación de un espacio vectorial.

ACTIVIDADES 2, 3 y 4. *Uso del Wronskiano y determinación de dependencia e independencia lineal*

En las siguientes actividades se espera que los estudiantes lleguen a deducir que el escenario representacional no proporciona información suficiente para poder obtener directamente una categorización sobre el concepto de dependencia e independencia lineal.

Estas actividades fueron realizadas en clases posteriores a la actividad 1 anteriormente reportada. Para este momento, los alumnos ya habían visto las definiciones de dependencia e independencia lineal y habían trabajado con el docente un ejemplo en el que aplicaban el método del Wronskiano.

En la actividad 2, se ponen en juego los conocimientos que el estudiante tiene de una recta, su pendiente, su ordenada al origen, el uso de derivadas sucesivas, y la solución de un determinante.

La actividad 3, propone que los estudiantes hagan uso de los elementos de una parábola, la gráfica de una función constante, el uso de derivadas sucesivas y la solución de un determinante.

Finalmente en la actividad 4 se estudian polinomios de segundo orden con la intención de tender un puente con otra serie de actividades que se han diseñado para tal fin.

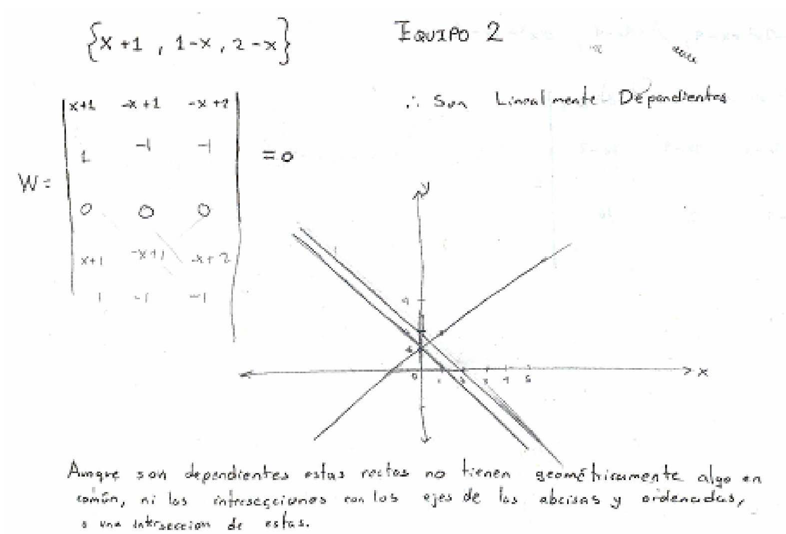
El surgimiento de dicho obstáculo, puede conducir hacia un nuevo desplazamiento del uso de la demostración analítica denominada isomorfismo lineal, el cual asocia un significado equivalente entre los polinomios de orden “n“ y el espacio $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

Algunas respuestas a las actividades

ACTIVIDAD 2

Dadas las siguientes funciones $\{x+1, 1-x, 2-x\}$:

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el Wronskiano.
b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?

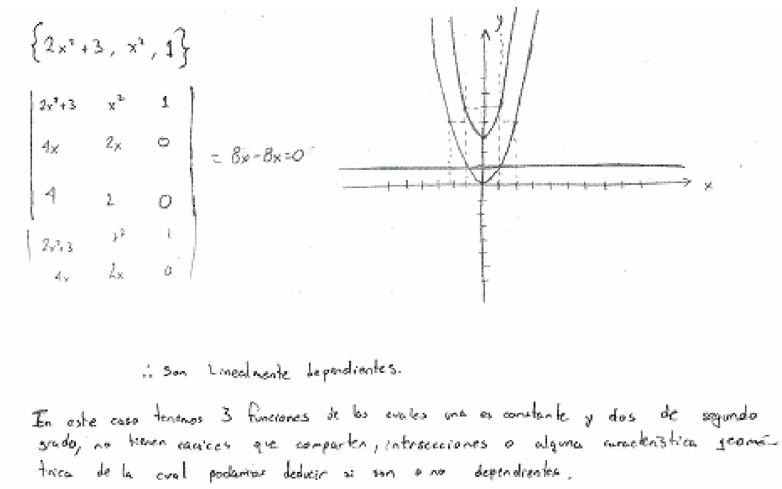


La actividad que hace uso del Wronskiano, está fundamentada en la definición la cuál involucra las n-1 derivadas sucesivas del conjunto de funciones, donde n representa el orden del polinomio. Haciendo uso de esta distribución se propone en la primera parte de esta actividad un conjunto de polinomios de primer orden en donde la respuesta que emiten los estudiantes se puede apreciar con claridad que a pesar de llegar a la solución analítica, ellos no encuentran una interpretación geométrica convirtiéndose la exploración que efectúan en algo sumamente interesante.

ACTIVIDAD 3

Dados los siguientes polinomios $\mathbf{2x^2+3, x^2, 1}$.

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes utilizando el Wronskiano.
b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?
d) ¿Qué sucedería con las respuestas anteriores si las funciones fueran $\mathbf{2x^2+3, x^2, 7}$?

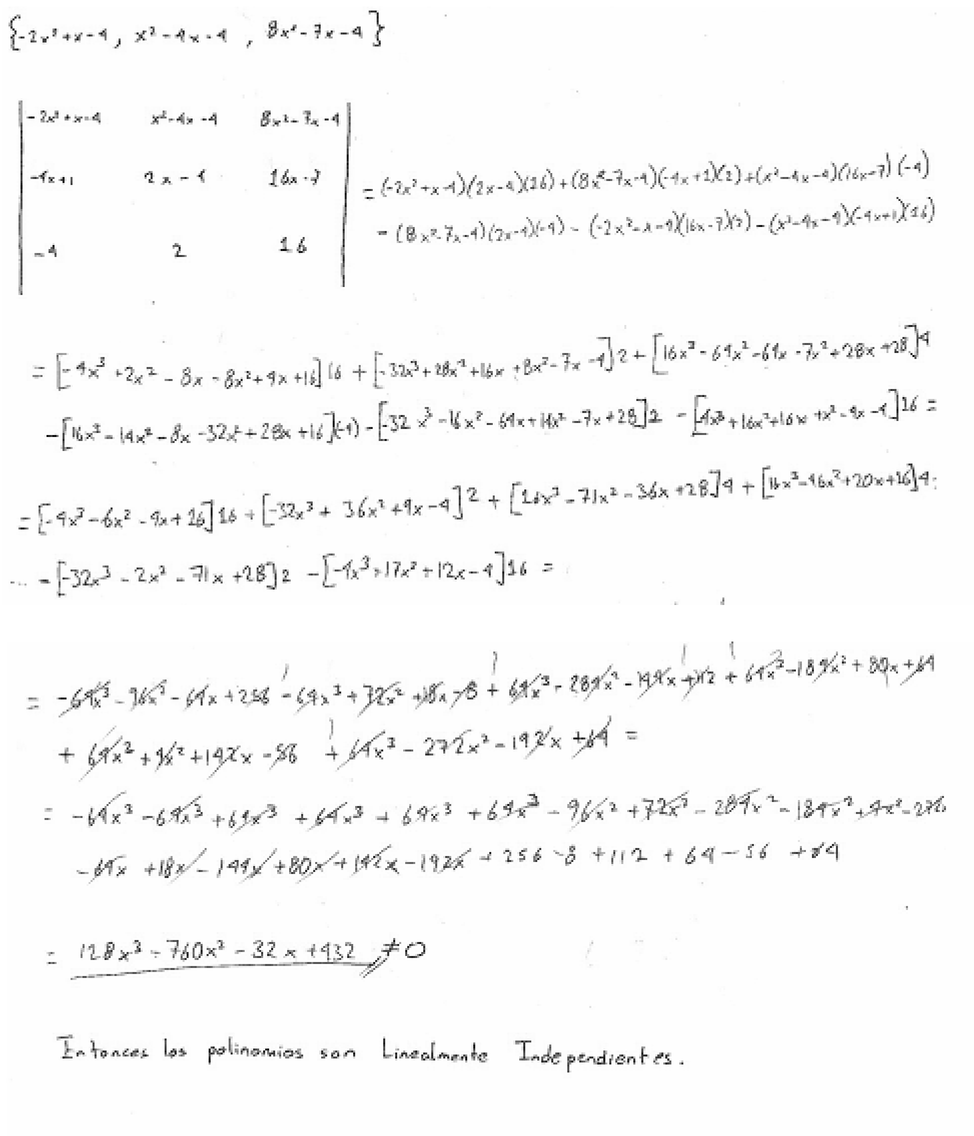


En esta actividad nuevamente logran encontrar el resultado analítico sin llegar a una interpretación geométrica.

ACTIVIDAD 4

Dados los siguientes polinomios $\mathbf{-2x^2+x-4, x^2-4x-4, 8x^2-7x-4}$.

a) Determine si son linealmente dependientes o independientes.
b) Grafique y plantee una explicación del porqué sucede la dependencia.
c) ¿Es posible determinar gráficamente su dependencia?



$\{-2x^2+x-4,\ x^2-4x-4,\ 8x^2-7x-4\}$

$$\begin{vmatrix} -2x^2+x-4 & x^2-4x-4 & 8x^2-7x-4 \\ -4x+1 & 2x-4 & 16x-7 \\ -4 & 2 & 16 \end{vmatrix} = (-2x^2+x-4)(2x-4)(16)+(8x^2-7x-4)(-4x+1)(2)+(x^2-4x-4)(16x-7)(-4)$$
$$-(8x^2-7x-4)(2x-4)(-4)-(-2x^2+x-4)(16x-7)(2)-(x^2-4x-4)(-4x+1)(16)$$

$$=[-4x^3+2x^2-8x-8x^2+4x+16]16+[-32x^3+28x^2+16x+8x^2-7x-4]2+[16x^3-64x^2-64x-7x^2+28x+28]4$$
$$-[16x^3-14x^2-8x-32x^2+28x+16](-4)-[-32x^3-16x^2-64x+14x^2-7x+28]2-[4x^3+16x^2+16x+x^2-4x-4]16=$$

$$=[-4x^3-6x^2-4x+16]16+[-32x^3+36x^2+4x-4]2+[16x^3-71x^2-36x+28]4+[16x^3-46x^2+20x+16]4$$
$$\ldots-[-32x^3-2x^2-71x+28]2-[-4x^3+17x^2+12x-4]16=$$

$$=-64x^3-96x^2-64x+256-64x^3+72x^2+8x-8+64x^3-284x^2-144x+112+64x^3-184x^2+80x+64$$
$$+64x^2+4x^2+142x-56+64x^3-272x^2-192x+64=$$
$$=-64x^3-64x^3+64x^3+64x^3+64x^3+64x^3-96x^2+72x^2-284x^2-184x^2+4x^2-276$$
$$-64x+18x-144x+80x+142x-192x+256-8+112+64-56+64$$

$$=\underline{128x^3-760x^2-32x+432} \neq 0$$

Entonces los polinomios son Linealmente Independientes.

En la resolución de esta actividad se aprecia una gran mecanización de la herramienta matemática en cuanto al álgebra se refiere, pero incluso el equipo 2 que muestra sus respuestas no logra alcanzar la gráfica de los polinomios. Dicha mecanización se pone de manifiesto en que como este ejercicio se encuentra a continuación del que requiere del método del Wronskiano, hicieron uso de este recurso en lugar de recurrir a la definición de combinación lineal, que hubiera facilitado los cálculos.

Discusión de los resultados

En este apartado se describen algunos de los elementos que consideramos son relevantes de comentar.

En la actividad 1, se observaron algunas dificultades por parte de los alumnos cuando trabajan con los cuadrantes II, III y IV ya que les cuesta establecer los rangos del valor que deben tener los escalares para cumplir con las condiciones que les solicitan. Algunos estudiantes discutieron incluso acerca de los signos que debían tener cada uno de los escalares que intervienen en las combinaciones lineales correspondientes.

Algunos de los equipos llegan sin problemas a la generación de la recta ***l*** a partir de los dos vectores que originalmente se proponen. En términos generales la mayoría de los estudiantes hacen uso de los elementos geométricos asociados a cada inciso del diseño en esta actividad.

Los equipos de estudiantes al trabajar con el Wronskiano presentan regularmente cierta resistencia, pues el concepto involucra hacer uso de derivadas sucesivas. También llegan a presentar frecuentemente resultados contradictorios entre los cálculos obtenidos y su respuesta en forma geométrica.

Conclusiones

El diseño de situaciones orientadas a la construcción de un concepto algebraico no resulta sencillo, debido a las características propias del álgebra en el discurso matemático escolar.

En relación a la puesta en práctica de las actividades podemos decir que si bien la totalidad de los estudiantes no pudieron resolverlas correctamente, se generó en el aula un ambiente en el que los intercambios de opiniones fueron muy ricos.

Resulta notorio que al solicitar interpretaciones las gráficas de la dependencia e independencia lineal de funciones polinómicas, muchos estudiantes intentaron identificar dichas interpretaciones a través de la búsqueda de intersecciones entre las curvas y intersecciones de las mismas con los ejes coordenados. Interpretamos estas respuestas como un intento de transferencia de conocimientos adquiridos en el análisis matemático a esta otra rama de la matemática. Esto nos permite identificar como una dificultad, la interpretación del concepto de dependencia e independencia lineal en la asignatura de álgebra lineal sobre objetos conocidos en otras áreas de la matemática cuando éstos son considerados como vectores.

Referencias Bibliográfícas:

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 55-80). Morelos, México.

Cantoral, R.; Montiel, G. (2002). *Una presentación visual del polinomio de Lagrange*. Enseñanza de la Matemática. Asociación Venezolana de Educación Matemática, Vol. 11 (1), 24–38.

Grossman, S. I. (1999). *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.

Lay, D. C. (2001). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. México: Pearson Educación.

Poole, D. (2004). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. México: Thomson Learning.

Williams, G. (2002). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México: McGraw- Hill.

Sierpinska, A**.** (1996). *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra*. Research Conference in Collegiate Mathematics Education, Central Michigan University.

---

[i] Alcaraz, J., Marmolejo, E., Marmolejo, C., Mercado, E. (1983). *La Maestría en Matemática Educativas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Una opción para la formación de profesores e investigadores.* Tesis de Maestría. CINVESTAV /IPN. Universidad Autónoma de Guerreo. Chilpancingo Gro. Pág. 33

ii Los programas **intermedios** son aquellos en los que buena parte de sus graduados se dedicarán a la práctica profesional y la otra parte, también considerable, a actividades académicas.

iii La ENS venía funcionando desde principios de la década de los 60´s, era tradicional en el estado que ahí se formaran los profesores para el nivel medio básico y medio superior, los estudiantes provenían de varios estados de la república e incidían por tanto en grandes regiones del país.